Table des matières

Document produit par Sébastien CABOT dans le cadre du cours «Théorie des graphes» donné à l'Université de Montréal durant la session d'hiver 2008.

1 Glossaire

Français	Anglais
parcours/cycle **eulérien**	***Euler*** *trail/cycle*
graphe **eulérien**	***eulerian*** *graph*
arbre couvrant minimum	*economical spanning tree*
arborescence	***directed/ rooted*** *tree*
graphe **recouvrable**	*traversable*
des arêtes **adjacentes**	***adjacent*** *edges*
deux sommets **adjacents**	***adjacent*** *vertices*
graphe est un **arbre**	***tree***
arc d'un graphe (orienté)	***directed edge***
arêtes d'un graphe	*graph* ***edges***
graphe **biparti(-complet)**	***(complete) bipartite*** *graph*
chaîne	***walk***
chemin	***path***
circuit	***circuit***
composante (connexe) d'un graphe	*graph* ***(connected) component***
graphe **complet**	***complete*** *graph*
graphe **connexe/non-connexe**	***connected/ disconnected*** *graph*
couplage	***matching***
cycle	***cycle***
digraphe ou **graphe orienté**	***digraph*** ou ***directed graph***
degré ou **valence** d'un sommet	*vertex* ***degree*** *ou* ***valence***
distance ou **écart** entre deux sommets	***distance***
extrémités d'une arête	***endpoints*** ou ***endvertice***
forêt	**forest**
graphe	***graph***
sommets d'un graphe	*graph* ***vertices***
sommet **incident** à une ou des arêtes	***incident*** *vertex*
arête(s) **incidente**(s) à un sommet	***incident*** *edge*
arête **incidente** à deux sommets	***incident*** *edge*
isthme	***bridge***
sommet **isolé**	***isolated*** *vertex*
sommet **pendant**	{de degré 1}
noeud d'un graphe (orienté)	*graph* ***node***
graphe r-**partie**	r-***partite*** *graph*
points d'un graphe	*graph* ***points***
parcours	***trail***
point d'articulation	***cutvertex***
graphe k-**régulier**	k-***regular*** *graph*
sommet **voisin** d'un sommet	***neighbouring*** *vertex*
voisinage (**ouvert**) d'un ou des sommets	***(open) neighbourhood***
voisinage fermé d'un ou des sommet	***close neighbourhood***

2 Notation

2.1 Ensemble

$\varnothing$	L'unique ensemble vide $\{\}$.
$x \in A$	L'élément x est dans l'ensemble A.
$x \notin A$	L'élément x n'est pas dans l'ensemble A.
$A \subseteq B$	L'ensemble A est un sous-ensemble de B (éventuellement $A = B$).
$A \subset B$	L'ensemble A est un sous-ensemble propre de B ($A \neq B$).
$\wp(A)$	L'ensemble puissance de A (la collection de tous les sous-ensembles).
$A \cup B$	L'union des ensembles A et $B = \{x \mid x \in A \, \text{ou} \, x \in B\}$.
$A \cap B$	L'intersection des ensembles A et $B = \{x \mid x \in A \, \text{et} \, x \in B\}$.
$A - B$	L'ensemle A moins l'ensemble $B = \{x \mid x \in A \, \text{et} \, x \notin B\}$.
$\|A\|$	La cardinalité de l'ensemble A. Aussi noté $\#A$ ou $\#\{a, ...\}$.

2.2 Graphe

$G(V, E)$	Le **graphe** G, composé de l'ensemble des sommets V et de l'ensemble des arêtes E.
$V(G) \, \text{ou} \, V_G$	L'ensemble des **sommets** du graphe G.
$E(G) \, \text{ou} \, E_G$	L'ensemble des **arêtes** du graphe G.
$\|G\| \, \text{ou} \, n(G)$	L'**ordre** du graphe G (le nombre de sommets).
$e(G)$	La **taille** du graphe G (le nombre d'arêtes).
$u \sim v$	Le sommet u est **adjacent** (ou voisin) au sommet v.
$d_G(v)$	Dans le graphe G, le **degré** du sommet v (nombre de voisins de v).
$d(u, v)$	La **distance** entre les sommets u et v.
$\delta(G) \, ou \, \delta_G$	Le **degré minimum** dans le graphe G.
$\Delta(G) \, ou \, \Delta_G$	Le **degré maximum** dans le graphe G.
$\Gamma_G(v)$	Dans le graphe G, les sommets **voisins** au sommet v.
$\Gamma_G(v) \cup \{v\}$	Dans le graphe G, le **voisinage fermé** du sommet v.
$\Gamma_G(W)$	Dans G, les sommets **voisins** à l'ensemble de sommets W.
$\overline{G}$	Le **complément** du graphe $G = (V, E)$. REMARQUE : $\overline{G} = (V(G), V(G)^2 - E(G)))$
G^*	Le graphe **dual** de G.
$H \subseteq G$	Le graphe H est un **sous-graphe** de G.
$G - v$	**Effacer** le sommet v du graphe G.
$G - uv$	**Effacer** l'arête uv du graphe G.
$G \cup v$	**Ajouter** le sommet v au graphe G.

$G \cup uv$	**Ajouter** l'arête uv au graphe G.
$G \cup H$	**Union** du graphe H et du graphe G.
$G + \{v\}$	**Joindre** le sommet v au graphe G.
$G + \{uv\}$	**Joindre** l'arête uv au graphe G.
$G + H$	**Joindre** le graphe H au graphe G.
G/xy	Dans le graphe G, **contraction** de l'arête xy.
G/A	Dans le graphe G, **contraction** de l'ensemble des sommets A.
$E_G(U, W)$	L'ensemble des arêtes qui joingnent un sommets de U à un de W, où U et W sont deux sous-ensembles disjoints de $V(G)$.
K_n	Le **graphe complet** d'ordre n. REMARQUE : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes
$K_{n,m}$	Le **graphe biparti-complet** avec deux partitions de n et m sommets respectivement. REMARQUE : $n \times m$ arêtes
E_n	Le **graphe vide** E, n sommets et aucune arête. REMARQUE : Noté plus souvent $E_n = \overline{K_n}$
G^n	Un graphe G arbitraire de n sommets.
$G(m, n)$	Un graphe G arbitraire de m sommets et n arêtes.
$G[U]$	Le **sous-graphe** de G **induit** par l'ensemble de sommet $U \subseteq V(G)$.
$\kappa(G)$	La **connectivité des sommets** du graphe G.
$\lambda(G)$	La **connectivité des arêtes** du graphe G.
$H \prec G$	Le graphe H est un mineur de G.
C_n	Un **cycle** de n sommets et de longeur n.
P_n	Un **chemin** de n sommets.

3 Terminologie

3.0.1 Joindre *(join)*

Deux sommets sont **joints** par une arête. Ou bien, une arête **joint** deux sommets.
Ex. 1) uv **joint** u et v.
Ex. 2) u et v sont **joint** par uv.

3.0.2 Une **extrémité** *(endvertice* ou *endpoint)*

Les deux sommets joints par une arête sont les **extrémités** de cette dernière.
Ex. : u est une **extrémité** de uv.

3.0.3 Incident(e) *(incident)*

Un sommet et une arête sont **incidents**, lorsque que le sommet est une extrémité de l'arête.
Ex. 1) uv est **incidente** à u et v.
Ex. 2) u est **incident** à uv.

3.0.4 Adjacent (adjacent)

Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont joints par une arête.
Deux arêtes sont **adjacentes** lorsqu'elles ont exactement un sommet commun.
Ex. 1) u et v sont **adjacents**, si $uv \in E(G)$.
Ex. 2) uv et vw sont **adjacentes**.
Ex. 3) u est **adjacent** à l'ensemble de sommets W.

3.0.5 Voisin *(neighbor)*

Deux sommets **voisins** sont joints par une arête.
Exemple : Dans le graphe $G = (\{u, v\}, \{uv\})$, le sommet u est **voisin** du sommet v.

4 Définition

4.1 Graphes et digraphes

4.1.1 Un **graphe** *(graph)*

$$G = \mathbf{graphe}\, G = (V, E) \text{ où } E \subseteq V^2$$

1. Un **graphe** G est un couple ordonné (V, E) de deux ensembles disjoints V et E. On écrit $G = (V, E)$.
2. Chaque élément de l'ensemble V est un **sommet** tandis que chaque élément de l'ensemble E est une **arête**.
3. L'ensemble, E, des arêtes, est un sous ensemble de V^2, composé de couples sans distinction sur l'ordre des éléments.
4. Un **graphe pair**(**impair**) contient uniquement des sommets de degré pair(impair).
5. $G = \mathbf{graphe}\ G = (V, E)$ où $E \subseteq V^2$

4.1.2 L'**ensemble des sommets** *(vertex set)*

$$V(G) = \mathbf{ensemble\,des\,sommets}\,\text{de}\, G = V$$

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, on note $V(G)$, l'ensemble des sommets du graphe G. On a $V(G) = V$.
2. Une notation alternative est V_G.

4.1.3 L'**ensemble des arêtes** *(edge set)*

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, on note l'ensemble de ses arêtes $E(G)$. On a $E(G) = E$.
2. Une notation alternative est E_G.

4.1.4 Un **sommet**, ou **point**, ou **noeud** *(vertex, point,* ou *node)*

1. On utilise plutot le terme **noeud** pour une **sommet** dans un graphe est orienté.
2. $v = \mathbf{sommet}\ v \Leftrightarrow v \in V(G)$

4.1.5 Une **arête**, ou **arc** *(edge* ou *arc)*

1. On reserve le terme **arc** lorsqu'il s'agit d'une **arête** dans un graphe orienté.
2. $uv = \mathbf{arête}\ uv = [u, v] \Leftrightarrow uv \in E(G)$
3. $uv = \mathbf{arc}\ uv = (u, v) \Leftrightarrow uv \in E(G)$

4.1.6 Un **graphe simple** *(simple graph)*

1. Un **graphe simple** est un graphe sans boucle où il y a au plus une arête entre deux sommets.

4.1.7 Un **multigraphe** *(multigraph)*

1. Un **multigraphe** est un graphe qui peut contenir des boucles et plus d'une arête entre ses sommets.

4.1.8 Un **digraphe** ou **graphe orienté** *(digraph* ou *directed graph)*

1. Un **graphe orienté**, ou **digraphe**, est un graphe dont ses arêtes sont orientées.

4.1.9 Deux **sommets adjacents** *(adjacent vertices)*

1. Dans un graphe G, deux **sommets adjacents** $u, v \in V(G)$ sont joints par une arête.
2. $u \sim v \Leftrightarrow u$ **adjacent** à $v \Leftrightarrow uv \in E(G)$

4.1.10 Des **arêtes adjacentes** *(adjacent edges)*

1. Dans un graphe G, des **arêtes adjacentes** possèdent exactement une extrémité en commun.
2. uv **adjacente** à $vw \Leftrightarrow v \in \Gamma(u) \wedge v \in \Gamma(w)$
3. $u_1v, u_2v, ..., u_nv$ sont **adjacentes** $\Leftrightarrow v \in \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma(u_i)$

4.1.11 Le **voisinage** ou **voisinage ouvert** *(neighbourhood* ou *open neighbourhood)*

1. Dans le graphe G, le **voisinage** ou **voisinage ouvert** d'un sommet v est l'ensemble des sommets adjacents à v.
2. $\Gamma_G(v) =$ **voisinage** de $v = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$
3. $\Gamma_G(U) =$ **voisinage** de l'ensemble de sommets $U \subseteq V(G) = \bigcup_{u \in U} \Gamma_G(u) = \{v \in V(G) \mid u \in U \, \text{et} \, v \in E(G)\}$

4.1.12 Le **voisinage fermé** *(close neighbourhood)*

1. Dans le graphe $G = (V, E)$, le **voisinage fermé** du sommet v est l'ensemble des sommets adjacents à v plus le sommet v lui-même.
2. **voisinage fermé** de $v \Leftrightarrow \Gamma(v) \cup \{v\}$

4.1.13 Un **sommet isolé** *(isolated vertex)*

1. Dans un graphe, un sommet qui n'a aucun voisin est un **sommet isolé**.
2. **sommet isolé** $v \Leftrightarrow \Gamma(v) = \varnothing$

4.1.14 Le **degré** ou la **valence** (*degree* ou *valence*)

1. Le **degré** (ou **valence**) d'un sommet v est le nombre d'arêtes qui ont pour extrémité v, autrement dit le nombre de voisins de v.
2. $d_G(v) =$ **degré** de $v = |\Gamma_G(v)|$

4.1.15 L'**ordre** d'un graphe *(order)*

1. L'**ordre** d'un graphe est le nombre de ses sommets.
2. $|G| =$ **ordre** de $G = |V(G)| = n$

4.1.16 La **taille** d'un graphe *(size)*

1. La **taille** d'un graphe est le nombre de ses arêtes.
2. $e(G) =$ **taille** de $G = |E(G)| = m$

4.1.17 Le **complément** d'un graphe *(complement)*

1. Pour un graphe $G = (V, E)$, son complément $\overline{G}$ est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement si ils ne le sont pas dans G.
2. $\overline{G} =$ **complément de** $G = (V, V^2 - E)$

4.2 Graphes particulier

4.2.1 Graphe **nul** *(null graph)*

1. Un **graphe nul** est un graphe sans sommet et sans arête.
2. $K_0 = E_0 =$ **graphe nul** $= (\varnothing, \varnothing)$

4.2.2 Graphe **trivial** *(trivial graph)*

1. Un **graphe trivial** est composé d'un seul sommet et d'aucune arête.
2. $K_1 = E_1 =$ graphe **trivial** $= G(\{v\}, \varnothing)$

4.2.3 Graphe **vide** d'un graphe *(empty graph)*

1. Un graphe **vide**, est un graphe sans arête.
2. $\overline{K} = E =$ **graphe vide** $= (V, \varnothing)$
3. Remarque : Pour éviter la confusion avec la notation de l'ensemble des arêtes E, on peut préfère utiliser la notation $\overline{K}$ pour identifier un graphe vide.

4.2.4 Graphe **vide *à* n*-sommets*** *(empty n-graph)*

1. $\overline{K}_n = E_n =$ **graphe vide à n-sommets** $= (\{v_1, ..., v_n\}, \varnothing)$

4.2.5 Un **chemin** *(path)*

1. Deux signification possible à la notation P_n. Soit le n représente la longueur, alors $n+1$ est le nombre de sommets. Soit le n représente le nombre de sommets, alors $n - 1$ est la longueur.
2. $P_n =$ **chemin de n-sommets** $= (\{v_1, ..., v_n\}, \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\})$

4.2.6 Un **cycle** *(cycle)*

1. Un cycle pair(impair) est de longeur pair(impair).
2. Un cycle pair est un graphe bipartie.
3. $C_n =$ **cycle de n-sommets** $= (\{v_1, ..., v_n\}, \{v_nv_1, v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\})$
4. Un cycle de 3 sommets est un triangle.
5. Un cycle de 4 sommets est un carré.
6. Un cycle de 5 sommets est un pentagone. Etc.

4.2.7 Graphe **complet** *(complete graph)*

1. Dans un **graphe complet** toutes les paires de sommets sont jointes par une arête.
2. Le K est en l'honneur de KURATOWSKI, pionnier de la théorie des graphes.
3. $K =$ **graphe complet** $= (V, \{uv \mid u, v \in V \wedge u \neq v\})$

4.2.8 Graphe **complet à** n **sommets** *(complete* n*-graph)*

1. Dans un **graphe complet** K_n **à** n **sommets**, il y a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.
2. Dans un **graphe complet** K_n **à** n **sommets**, le degré des sommets est $n-1$.
3. Un **graphe complet** K_n est un graphe régulier, plus précisément un graphe $(n-1)$-régulier.
4. $K_n =$ **graphe complet** d'ordre $n = (\{v_1, ..., v_n\}, \{v_i v_j \in \{v_1, ..., v_n\}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\})$

4.2.9 Graphe **régulier** *(regular graph)*

1. Un graphe est **régulier** si tout ses sommets ont le même degré.
2. G est **régulier** $\Leftrightarrow \forall u, v \in V(G), d_G(u) = d_G(v)$
3. G est **régulier** $\Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G)$

4.2.10 Graphe k**-régulier** *(*k*-regular graph)*

1. Un graphe est k**-régulier** ou **régulier de degré** k si tout ses sommet sont de degré k.
2. G k**-régulier** $\Leftrightarrow \forall v \in V(G), d_G(v) = k$
3. G k**-régulier** $\Leftrightarrow \delta(G) = \Delta(G) = k$
4. G 0-régulier est un graphe trivial
5. G 2-régulier est un graphe composé d'un ou plusieurs cycles.
6. G connexe et 0-régulier, graphe trivial d'un seul sommet.
7. G connexe et 1-régulier, graphe de 2 sommets et 1 arête.
8. G connexe de 2-régulier, le graphe est un cycle.
9. En particulier, on dit d'un graphe 3-régulier qu'il est **cubique**. Puisque la somme des degrés d'un graphe est impair, un graphe 3-régulier doit avoir un nombre pair de sommet, de même pour les autres graphes k-régulier avec k impair.
10. Un graphe k-régulier de $(k+1)$ sommets et un graphe complet K_{n+1}.
11. G **3-régulier** $\Leftrightarrow$ G **cubique** $\Leftrightarrow \forall v \in V(G), d_G(v) = 3$

4.2.11 Graphe **biparti** *(bipartite graph)*

1. Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti** si l'ensemble de ses sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V et W tel que chaque arête de E a une extrémité dans V et l'autre dans W.
2. G est **biparti** $\Leftrightarrow V(G) = V \cup W \wedge V \cap W = \varnothing \wedge \forall vw \in E(G), v \in V, w \in W$
3. G **biparti** $= ((V - W) \cup (W - V), \{vw \mid v \in V \wedge w \in W\})$

4.2.12 Graphe **biparti-complet** *(complet bipartite graph)*

1. Un graphe $K_{n,m}$ est **biparti-complet** si chaque sommets dans une partition est joint par une arête à chaque sommet dans l'autre partition.
2. $K_{n,m} = K_{n,m}$ est **biparti-complet** $= \overline{K_n} + \overline{K_m}$

4.2.13 **Arbre** *(tree)*

1. Un graphe sans cycle et connexe est un **arbre**
2. $m = n - 1$
3. Pour $n \geq 2$ l'arbre possède au moins deux sommet de degré 1 (deux feuilles).

4.2.14 **Forêt** *(forest)*

1. Un graphe sans cycle est une **forêt**.
2. On a $m \leq n - 1$, avec l'égalité ssi la fôret est formée d'un seul arbre.
3. Chaque composante de la forêt est un arbre.
4. Une forêt F est une union disjointe d'arbres T_i.

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

4.3 Opérations sur les graphes

1. **Complément** de G

$$\overline{G} = (V(G), V(G)^2 - E(G))$$

2. Dans $G = (V, E)$, **contraction** de l'arête uv

$$G/uv = (V - \{u\}, E(G-u) \cup \{vu' \mid u' \in \Gamma(u) \text{ et } u' \neq v\})$$

3. Dans $G = (V, E)$, **contraction** de l'ensemble des sommets $V' \subset V$ *(contration of $V'$to a vertex)*

$$G/V' = (V - V' \cup \{x\}, E(G - V') \cup \{xy \mid y \in (\bigcup_{v \in V'} \Gamma_G(v) - V'\}))$$

4. **Effacer le sommet** v du graphe G *(deleting a vertex)* lorsque $v \in V(G)$

$$G - v = G - \{v\} = G[V(G) - \{v\}] = (V(G) - \{v\}, E(G) - \{uv \in E(G) \mid u \sim v\})$$

5. **Effacer les sommets** de V' du graphe G *(deleting vertices)* lorsque $V' \subseteq V(G)$

$$G - V' = G[V(G) - V'] = (V(G) - V', \{uw \in E(G) \mid u, v \notin V'\})$$

6. **Effacer l'arrête** uv du graphe G *(deleting an edge)* lorsque $uv \in E(G)$

$$G - uv = G - \{uv\} = (V(G) - \{u, v\}, E(G) - uv)$$

7. **Effacer les arrêtes** de E' du graphe G *(deleting edges)* lorsque $E' \subseteq E(G)$

$$G - E' = (V(G) - \{u, v \mid uv \in E'\}, E(G) - E')$$

8. **Ajout d'un sommet** v au graphe G *(adding vertex)* lorsque $v \notin V(G)$

$$G \cup v = G \cup \{v\} = (V(G) \cup \{v\}, E(G))$$

9. **Ajout des sommets** dans V' au graphe G *(adding vertices)* lorsque $V' \cap V(G) = \varnothing$

$$G \cup V' = (V(G) \cup V', E(G))$$

10. **Ajout d'une arête** uv au graphe G *(adding edge)* lorsque $uv \notin E(G)$

$$G \cup uv = G \cup \{uv\} = (V(G), E(G) \cup \{uv\})$$

11. **Ajout des arêtes** dans E' au graphe G *(adding edges)* lorsque $E' \cap E(G) = \varnothing$

$$G \cup E' = (V(G), E(G) \cup E')$$

12. **Joindre un sommet** v au graphe G *(join of v to G)* lorsque $v \notin V(G)$

$$G + v = G + \{v\} = (V(G) \cup \{v\}, E(G) \cup \{uv \mid u \in E(G)\})$$

13. **Joindre les sommets** de V' au graphe G *(joining vertices)* lorsque $V' \cap V(G) = \varnothing$

$$G + V' = (V(G) \cup V', E(G) \cup \{vv' \mid v \in V(G), v' \in V'\})$$

14. **Joindre un graphe** G' à un graphe G *(join $G + G'$)*

$$G + G' = (V(G) \cup V(G'), E(G) \cup E(G') \cup \{vv' \mid v \in V(G), v' \in V(G')\})$$

4.4 Chemin, cycle et connexité

4.4.1 Sommets indépendants *(independent vertices)*

1. Un **ensemble indépendant de sommets** dans un graphe est un ensemble où tous les sommets sont mutuellement non-adjacents. (aucun de ses sommets sont joints par une arête).
2. V **indépendants** $\Leftrightarrow \forall v \in V, \Gamma(v) \cap V = \varnothing)$
3. $W \subset V(G)$ est indépendant $\Leftrightarrow G[W]$est un stable (graphe vide)

4.4.2 Arêtes indépendants ou couplage*(independent edges* ou *matching)*

1. Les arêtes d'un ensemble E sont idépendantes si elles sont toutes non-adjacente (pas de sommet commun).
2. E **indépendants** $\Leftrightarrow \forall uv \in E, \forall ab \in E \setminus \{uv\}, a \neq b \neq u \neq v)$

4.4.3 Couplage maximum *(maximum matching)*

1. Un couplage avec le nombre maximum d'arêtes.

4.4.4 Couplage complet *(complete matching from U to V* ou *U/V-saturating)*

1. Dans un graphe G biparti, avec les partions U et W, il y a un **couplage complet** M de U à V si tous les sommets de U sont présents dans le couplage M.

4.4.5 Chemins indépendants *(independent paths* ou *internaly disjoint)*

1. Un ensemble de chemins $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ est indépendant si les seuls sommets communs entre deux chemins P_i et P_j sont leurs extrémités.
2. $P_1, P_2, ..., P_n$ chemins x-y **indépendants** $\Leftrightarrow V(P_i) \cap V(P_j) = \{x, y\}, i \neq j$

4.4.6 Chemin ou chaîne élémentaire *(path)*

1. Un **chemin** P est un graphe $P(V, E)$ de la forme
   $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$
   $E = \{v_1v_2, v_2v_3, ..., v_{n-1}v_n\}$
   Remarque : Aucun répétion de sommet, aucune répétition d'arête.
2. P est un **chemin** de v_1 à v_n ou un **chemin** v_1-v_2.
3. La **longueur** du chemin est son nombre d'arête.

$$\textbf{longueur}\,\text{de}\, P = e(P) = |E(P)| = n - 1$$

4. Terminologie : Les **extrémités** du chemin sont v_1 et v_2.

5. NOTATION : Le **chemin** P se note $v_1v_2...v_n$.
6. NOTATION : P_l est un chemin arbitraire de longeur l.

$$\textbf{chemin}\, P = (\bigcup_{1\leq i\leq n} \{v_i\}, \bigcup_{1\leq i<n} \{v_iv_{i+1}\})$$

4.4.7 Chaîne *(walk)*

1. Une **chaîne** W dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes, commencant et se terminant par un sommet.
   REMARQUE : Répétion de sommets possible et répétition d'arêtes possible.
2. La chaîne $W = \langle x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, ..., x_{n-1}, e_n, x_n\rangle$ où $e_i = x_{i-1}x_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
3. La chaîne W a une **longueur** de n (nombre d'arêtes dans la chaîne).
4. Si la chaîne a une **longueur paire** (impaire) on dit que c'est une **chaîne paire** (impaire).
5. Si $x_0 = a$ et $x_n = b$ alors on dit que la chaîne W **relie** a et b.
6. Un sommet v est **atteignable** du sommet u, s'il existe une chaîne u-v.
7. Une chaîne du sommet x_0 au sommet x_n est aussi appelé «**chaîne** x_0-x_n».
8. Si $x_0 = x_n$, alors il s'agit d'une chaîne fermée. Autrement, si $x_0 \neq x_n$, alors il s'agit d'une chaîne ouverte.
9. Une chaîne doit contenir au moins une arête, sinon il s'agit d'une **chaîne trivial,** elle est composée d'un seul sommet et est de longueur 0.
10. NOTATION : La chaîne W se note $\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\rangle$.
11. NOTATION ALTERNATIVE : La chaîne W peut aussi se noter $\langle e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n\rangle$.
12. Les chaînes$\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\rangle$ et $\langle x_n, x_{n-1}, ..., x_1, x_0\rangle$ sont les même.
13. Si l'on dit *«la chaîne la plus courte»*, la **chaîne** est nécessairement un **chemin** (aucune répétition de sommet). Il serait donc plus juste dire *«le chemin le plus court»*.

4.4.8 La **distance** ou l'**écart** *(distance)*

1. La **distance** $d(u, v)$ entre deux sommet u et v dans un graphe est la longueur du chemin u-v le plus court qui les relie, si elle existe. Sinon, la distance est $d(u, v) = \infty$.
2. $d(u, v) = min\{\langle u, ..., v\rangle\}$
3. $\overrightarrow{d}(u, v)$, la **distance orientée**, longueur du chemin orienté le plus court.

4.4.9 Le **diamètre** *(diameter)*

1. Le **diamètre** d'un graphe est la distance maximale entre deux de ses sommets.
2. $dia(G) = min\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$

4.4.10 Un **parcours** ou une **chaîne simple** *(Trail)*

1. Une **parcours** P dans un graphe est une séquence alternée de sommets et d'arêtes, où toutes les arêtes sont distinctes.
   REMARQUE : Répétion de sommets possible et pas de répétition d'arêtes.
2. Le parcours $P = x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, ...e_{n-1}, x_n$ où $e_i = x_i x_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $e_i \neq e_j$ pour $1 \leq i < j \leq n$
3. P est un parcours de longueur $n - 1$.
4. P est un parcours x_1-x_n.
5. Notation : Le parcours P se note $x_1 x_2 x_3 ... x_n$.

4.4.11 **Revouvrable** *(traversable)*

1. Un graphe G est **recouvrable** s'il existe un parcours passant par tous ses sommets.
2. TERMINOLOGY : Dans un graphe revouvrable, on dit qu'il y a **recouvrement des arêtes** par un parcours.
3. Synonyme de **parcours eulérien**.

4.4.12 **Circuit** ou **cycle élémentaire** *(circuit)*

1. Un **circuit** C dans un graphe est un parcours dont les extrémités coïncides.
   REMARQUE : Répétion de sommets possible et aucune de répétition d'arêtes.

4.4.13 **Cycle** *(cycle)*

1. Un **cycle** C dans un graphe est un chemin dont les extrémités coïncides.
   REMARQUE : Pas de répétion de sommets et pas de répétition d'arêtes.
2. C_l = cycle arbitraire de longeur l
3. C_3 est un triangle, C_4 est un quadrilatère, C_5est un pentagone, et ainsi de suite.
4. Un cycle est pair(impair) si sa longeur est pair(impair).
5. Un graphe sans cycle est **acyclique** (*acyclic*)

4.4.14 **Chemin/cycle/graphe hamiltonien** *(hamiltonian path/cycle/graph)*

1. Un cycle qui contient tous les sommets d'un graphe est un **cycle hamiltonien**.
2. Un **chemin hamiltonien** est un chemin qui contient tous les sommets d'un graphe.
3. Un graphe qui a un cycle hamiltonien est un **graphe hamiltonien**.

4.4.15 Parcours/circuit/graphe eulérien *(eulerian graph, Euler trail/tour)*

1. Un circuit qui contient toutes les arêtes d'un graphe est un **circuit eulérien**.
2. Un **parcours eulérien** est un parcours qui contient toutes les arêtes d'un graphe.
3. Un graphe avec un circuit eulérien est un **graphe eulérien**.

4.4.16 Tableau synoptique

	Répétition d'arêtes		
	OUI	NON	Graphe (avec circuit/cycle)
Rép. de sommets OUI	chaîne (ouverte) *(open walk)* chaîne (ouverte) *(close walk)*	parcours *(trail)* circuit *(circuit)*	eulérien (toutes les arêtes)
Rép. de sommets NON	—	chemin *(path)* cycle *(cycle)*	hamiltonien (tous sommets)

4.5 Graphe partiel, sous-graphes et composante

4.5.1 Sous-graphe *(subgraph)*

1. Un graphe H dont tous ses sommets et toutes ses arêtes sont dans G est un sous-graphe de G.
2. On dit que G contient H.
3. $H \subseteq G \Leftrightarrow H$ **sous-graphe** de $G \Leftrightarrow V(G') \subseteq V(G) \wedge E(G') \subseteq E(G)$

4.5.2 Sous-graphe couvrant, ou graphe partiel *(spanning subgraph)*

1. On obtient G' un **sous-graphe couvrant** de G en enlevant une ou plusieurs arêtes du graphe G.
2. **sous-graphe couvrant** $G' = (V(G), E' \subset E(G))$
3. **Graphe partiel** est un terme propre à la terminologie française.

4.5.3 Sous-graphe induit *(subgraph induced by)*

1. On obtient le **sous-garphe induit** de G par $A \subseteq V(G)$ en supprimant les sommets du graphe G qui ne sont pas dans A, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.
2. $G[A] =$ **sous-graphe induit** de G par $A = (A, \{uv \mid u, v \in A \,\text{et}\, u, v \in E(G)\})$

4.5.4 Sous-graphe partiel *(proper subgraph)*

1. On obtient un **sous-graphe partiel** de G en enlevant une ou plusieurs arêtes d'un sous-graphe de G.
2. **sous-graphe partiel** $G' = (V(G) - V', E(G) - E' - \{uv \mid u \in V' \vee v \in V'\})$

4.5.5 Clique ou sous-graphe complet *(clique ou complete subgraph)*

1. On appelle une **clique** G' de G, un sous-graphe complet de G.
2. **clique** $G' = (V(G) - V', \{uv \mid u, v \notin V' \wedge uv \in V(G)\})$

4.5.6 Stable ou sous-graphe vide *(empty subgraph)*

1. On appelle **stable** G' de G, un sous-graphe de G sans arêtes.
2. **stable** $G' = (V(G) - V', \varnothing)$

4.5.7 Connexe *(connected)*

1. Un graphe est **connexe** si pour chacune des paires, u et v, de sommets distincts, il existe un chemin de u à v.

4.5.8 Composante connexe *(component ou maximal connected subgraph)*

1. Une **composante** d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximale de G.
2. **composante connexe de** $G = (????, ????)$

4.5.9 Point d'articulation *(cutvertex)*

1. Un **point d'articulation** est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

4.5.10 Un **ensemble d'articulation** *(vertex-cut)*

1. Dans un graphe G, un **ensemble d'articulation** $U \subset V(G)$ est un ensemble dont la suppression dans G entraîne un graphe non-connexe.

4.5.11 La **connectivité des sommets** ou **connectivité** *(vertex connectivity ou connectivity)*

1. La connectivité d'un graphe G est le nombre minimum de sommet à effacer pour que G devienne non-connexe ou soit réduit à un sommet unique.
2. Un graphe est k-connexe, si sa connectivité $\kappa(G) \geq k$.

4.5.12 La **connectivité des arêtes** *(edge-connectivity)*

1. La **connectivité des arêtes** d'un graphe connexe G est le nombre minimum d'arêtes à effacer pour que G ne soit plus connexe.
2. Un graphe est k-arête-connexe, si sa connectivité $\lambda(G) \geq k$.

4.5.13 Un **isthme** ou un **pont** *(bridge)*

1. Un **isthme** est une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

5 Bibliographie

- Seymour LIPSCHUTZ et Marc LIPSON (2007).
  Discrete Mathematics, 3e édition, McGraw-Hill, 474 pages.
  Page 154 à 228.
  ISBN 0-07-147038-7

- Seymour LIPSCHUTZ (1990).
  Mathématiques discrètes, Paris, McGraw-Hill, 248 pages.
  Page 82 à 131.
  ISBN 2-7042-1233-3

- Kenneth H. ROSEN (2006).
  Discrete Mathematics and Its Applications, 6e édition, McGraw-Hill, 910 pages.
  ISBN 0073312711

- Kenneth H. ROSEN (1999).
  Mathématiques discrètes, Chenelière.
  ISBN 2894611765

- Douglas B. WEST (2001).
  Introduction to Graph Theory, 2e édition, Prentice-Hall, 588 pages.
  ISBN 0-13-014400-2

- Jean-Claude FOURNIER (2006).
  Théorie des graphes et applications, 1re édition, Paris, Lavoisier, 288 pages.
  ISBN 2-7462-1247-1

- Claude BERGE (1983).
  Graphes, 3e édition, Paris, Bordas, 400 pages.
  ISBN 2-04-015555-4

- Béla BOLLOBÁS (2002).
  Modern Graph Theory, 3e impression, New York, Springer, 408 pages.
  ISBN 0-387-98488-7

- W.D. Wallis (2007)
  A Beginner's Guide to Graph Theory, 2e édition, Boston≺Basel≺Berlin, Birkhäuser, 260 pages.
  ISBN 978-0-8176-4484-0

- Jonathan L. GROSS et Jay YELLEN (2006).
  Graph Theory and Its Applications, 2e édition, Floride, Chapman & Hall/CRC, 800 pages.
  ISBN 158488505X

– Didier Müller, (2008).
Introduction à la théorie des graphes, 44 pages.
`http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/coursgraphes.pdf`
(11 février 2008)

6 Logiciels

– yED par yWorks. `http://www.yworks.com/en/products_yed_about.htm`
– Tulip par David AUBER. `http://www.tulip-software.org/`