Relation binaire

Une **relation binaire** est un concept mathématique qui systématise des notions comme « ... est supérieur ou égal à ... » en arithmétique, ou « ... est élément de l’ensemble ... » en théorie des ensembles. C’est un cas particulier de *relation générale* ou *correspondance*. On retrouve aussi ce concept en théorie des graphes.

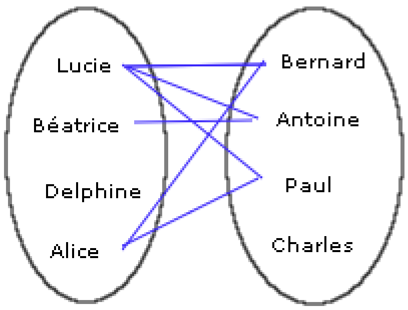
Sommaire

Introduction

De manière informelle, une relation entre deux *ensembles* est une proposition qui lie certains éléments du premier ensemble avec d’autres éléments du second ensemble.

Sur un ensemble F constitué de filles et un ensemble G constitué de garçons, par exemple, on pourrait définir une relation « Alice aime Bernard », ou une autre relation « Béatrice connaît Paul »... On peut donc voir la *relation* comme étant des fils reliant des éléments de deux ensembles.

Dans le cas d’un ensemble fini, on peut alors tenter de représenter la relation par un diagramme: si F = {Lucie, Béatrice, Delphine, Alice} et si G = {Bernard, Antoine, Paul, Charles}, la relation *aime* peut être schématisée par le diagramme suivant :



On pourra déplorer le fait que Delphine n'aime personne, que Lucie ait un cœur généreux et que Charles puisse se sentir seul.

On peut aussi tenter de faire la liste des *couples* ainsi en relation. (pour plus de commodité, on ne conservera que les deux premières lettres du prénom)

Gr = {(Lu,Be) , (Lu, An) , (Lu, Pa) , (Bé, An) , (Al, Pa) , (Al, Be)}

En mathématique, un « couple » est formé de deux éléments mis entre parenthèses dans un ordre particulier. La *relation* est définie en première approche comme un ensemble de couples, c'est-à-dire que si deux éléments sont reliés entre eux, alors le couple est un élément de l'ensemble *relation*. Si l'on appelle F l'ensemble des filles, et G l'ensemble des garçons, alors l'ensemble de tous les couples possibles est appelé « produit cartésien de F par G » et est noté $F \times G$ et la relation *aime* est alors définie par l'ensemble F, l'ensemble G et un sous-ensemble de $F \times G$.

Définition formelle

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times F$.

Si $(x, y) \in \mathcal{G}$ on dit que x est en relation avec y et on le note « $x\mathcal{R}y$ ».

- Dans le cas particulier où $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire définie **sur** E ou **dans** E.
- Dans le cas où $E = F \times F$, on parlera de relation ternaire interne sur F.
- Plus généralement, si $E = F^{n-1}$, on parlera de relation n-aire sur F.

On remarquera qu'il est nécessaire, dans une relation binaire, de préciser l'ensemble E (appelé **ensemble de départ**), l'ensemble F (appelé **ensemble d'arrivée**) ET la partie $\mathcal{G}$ de $E \times F$ appelée le **graphe** de la relation.

Une relation binaire peut être considérée comme une fonction de $E \times F$ à valeur dans l'ensemble { *Vrai* , *Faux* } , et qui à un couple (x , y) associe *Vrai* si x est en relation avec y et *Faux* sinon (indiquant si le couple (x , y) est un élément du graphe de la relation ou non).

Composition et inversion

Composition

Si $\mathcal{R}$ est une relation de E dans F et $\mathcal{S}$ de F dans G, on peut définir une relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de E dans G par :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{S}\circ\mathcal{R}} = \{(x,y) \in E \times G \,|\, \exists z \in F / \, (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}$$

Notation: si $\mathcal{R}$ est une relation sur un ensemble E et n un entier naturel, on note $\mathcal{R}^n$ la composition de $\mathcal{R}$ avec elle-même n fois, avec la convention que $\mathcal{R}^0$ dénote la relation d'égalité sur E.

Inversion

Si $\mathcal{R}$ est une relation de E sur F, on peut définir une relation de F sur E dite relation **inverse**, **réciproque** ou **converse**, par :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(x,y) \in F \times E \,|\, (y,x) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}\}.$$

Exemples:

- « plus petit que » et « plus grand que » sont des relations inverses l'une de l'autre.
- « aime » et « est aimé par » sont aussi inverses l'une de l'autre.

Relation fonctionnelle

Lorsque, pour tout élément x de E, x n'est en relation qu'avec 0 ou 1 élément y de F, on dit que la relation est *fonctionnelle*. C'est un cas particulier de **fonction**. En langage formel, la propriété précédente s'écrit :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \forall z \in F, [(x,y) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \wedge (x,z) \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}] \Rightarrow (y = z)$$

Pour plus de précisions, voir l'article « Fonction mathématique ».

Exemple important :

La **diagonale** de E est définie par :

$$\Delta_E = \{(x,x) \,|\, x \in E\}.$$

C'est le graphe de la **relation d'égalité** sur E, notée « $=_E$ », ou « = » en l'absence d'ambiguïté sur l'ensemble concerné.
Cette relation est aussi une fonction, l'**identité** de E, notée « Id_E ».

Relation sur (ou dans) un ensemble

Si $E = F$, on parlera de relation sur (ou dans) E.

Propriétés liées à la réflexivité

Relation réflexive

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **réflexive** si tout élément de E est en relation avec lui-même, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

Une relation est donc *réflexive* ssi son graphe contient la diagonale de E, c'est-à-dire si :

$$\Delta_E \subseteq \mathcal{G}_\mathcal{R}$$

En d'autres termes, l'intersection du graphe de la relation avec la diagonale de E est égale à cette diagonale.

Exemples:

- la relation d'*inclusion* entre ensembles est réflexive : tout ensemble est inclus dans lui-même;
- dans un ensemble de nombres, la relation « est un diviseur de » est réflexive : tout nombre est son propre *diviseur*;
- dans un ensemble de personnes, la relation « est de la même famille que » est réflexive...

La **clôture réflexive**, notée « $\mathcal{R}^{refl}$ », d'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est la relation sur E dont le graphe est l'union de celui de $\mathcal{R}$ et de la diagonale de E :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}^{refl}} = \mathcal{G}_\mathcal{R} \cup \Delta_E$$

Relation irréflexive

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **irréflexive** ssi aucun élément de E est en relation avec lui-même, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in E, x\not\mathcal{R}x$$

Une relation est donc *irréflexive* ssi son graphe est disjoint de la diagonale de E, c'est-à-dire si :

$$\Delta_E \cap \mathcal{G}_\mathcal{R} = \emptyset$$

L'intersection du graphe de la relation avec la diagonale de E se réduit donc à l'ensemble vide.

Exemples :

- l'inégalité stricte sur les *entiers* est un exemple de relation irréflexive : aucun entier n'est strictement inférieur à lui-même;
- dans un ensemble de personnes, la relation « est enfant de » est irréflexive : personne n'est son propre enfant;
- dans un *polyèdre*, la relation « a un et un seul côté commun avec » est une relation irréflexive entre ses faces : aucune face n'a qu'un seul côté commun avec elle-même (une face a au moins 3 côtés en commun avec elle-même)...

Une relation sur un ensemble d'au moins deux éléments peut bien entendu n'être ni *réflexive*, ni *irréflexive*, il suffit qu'un élément soit en relation avec lui même et l'autre non.

Les seules relations à la fois réflexives et irréflexives sont les relations dont le graphe est vide.

Propriétés liées à la symétrie

Relation symétrique

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **symétrique** si et seulement si lorsqu'un premier élément de E est en relation avec un second élément de E, le second élément est lui aussi en relation avec le premier, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$$

Une relation est donc *symétrique* si et seulement si son graphe se confond avec celui de sa relation inverse, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}}$$

En d'autres termes, une relation *symétrique* est une relation qui se confond avec sa réciproque :

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$$

L'égalité entre graphes ci-dessus peut encore s'écrire :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}}.$$

Exemples :

- dans un ensemble de personnes, la relation « est de la même famille que » est symétrique;
- dans un polyèdre, la relation « a un et un seul côté commun avec » est une relation symétrique entre ses faces : si une face a un côté commun avec une autre face, cette dernière a le même côté commun avec la première face;
- parmi les *entiers naturels*, la relation « forme un produit pair avec » est symétrique, car la multiplication des entiers est *commutative*.

La **clôture symétrique**, notée « $\mathcal{R}^{sym}$ », d'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est la relation sur E dont le graphe est l'union de celui de $\mathcal{R}$ et de sa réciproque (ou inverse) :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}^{sym}} = \mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}}$$

Cette clôture symétrique est d'ailleurs *universelle* parmi les relations symétriques contenant $\mathcal{R}$ (ce qui ici, sans entrer dans des considérations catégoriques, signifie que c'est la plus petite !).

Relation antisymétrique

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **antisymétrique** ou **faiblement antisymétrique** si et seulement si lorsque deux éléments de E sont en relation mutuelle, ils sont en fait confondus, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x)] \Rightarrow (x = y)$$

Une relation est donc *faiblement antisymétrique* si et seulement si l'intersection de son graphe avec celui de sa réciproque est incluse dans la diagonale de E, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}} \subseteq \Delta_E.$$

Exemples:

- les relations « plus grand que » et « plus petit que » sur les *entiers naturels* ou sur les *réels*.
- la relation « divise » dans l'ensemble des entiers naturels

Quand une relation est à la fois anti-symétrique et irréflexive, on dit parfois qu'elle est **fortement antisymétrique**. On peut alors simplifier la définition.

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **fortement antisymétrique**, c'est-à-dire antisymétrique et irréflexive, si et seulement si lorsqu'un premier élément de E est en relation avec un second élément de E, le second élément n'est pas en relation avec le premier, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\not\mathcal{R}x)$$

Une relation est donc *fortement antisymétrique* si et seulement si l'intersection de son graphe avec celui de sa réciproque est vide, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}} = \emptyset.$$

Exemples :

- les relations d'ordre strict, comme la relation « est strictement plus grand que » sur les entiers ou les réels, ou la relation d'inclusion stricte sont fortement antisymétriques.
- dans un ensemble de personnes, la relation « est enfant de » est asymétrique : personne n'est son propre enfant, ni *a fortiori* l'enfant de ses enfants...

Pour une relation dont on sait par ailleurs qu'elle est irréflexive, l'antisymétrie forte et l'antisymétrie sont équivalentes, et donc la plupart du temps on parle simplement d'antisymétrie.

Les seules relations *symétriques* et *fortement antisymétriques* sont les relations vides. Par contre l'égalité sur n'importe quel ensemble est une relation à la fois symétrique et antisymétrique.

Une relation peut n'être ni symétrique ni antisymétrique, comme par exemple la relation de divisibilité sur les *entiers relatifs*.

Transitivité

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **transitive** ssi lorsqu'un premier élément de E est en relation avec un deuxième élément lui-même en relation avec un troisième, le premier élément est aussi en relation avec le troisième, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, [(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z)] \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$$

Une relation $\mathcal{R}$ est donc *transitive* ssi son graphe contient celui de sa composée avec elle-même, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}\circ\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$$

Exemple :

- la relation $\leq$ sur les entiers naturels est transitive.

On appelle **clôture transitive** de $\mathcal{R}$ la relation

$$\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{R}^n$$

elle est *universelle* parmi les relations transitives contenant $\mathcal{R}$. Elle est notée « $\mathcal{R}^{trans}$ ».

Relation totale

La relation $\mathcal{R}$ sur E est **totale** ssi pour toute paire d'éléments de E, elle institue au moins un lien entre les deux éléments considérés, c'est-à-dire si :

$$\forall (x,y) \in E^2, (x\mathcal{R}y) \vee (y\mathcal{R}x)$$

La relation est donc **totale** ssi l'union de son graphe avec celui de sa réciproque est égale au carré cartésien de E, c'est-à-dire si :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}} \cup \mathcal{G}_{\mathcal{R}^{-1}} = E^2$$

Exemple : la relation $\leq$ sur l'ensemble des réels est une relation totale.

Contre-exemple : la relation « divise » sur l'ensemble des entiers naturels n'est pas totale.

Relation d'équivalence

Une relation **d'équivalence** est une relation réflexive, transitive et symétrique. L'exemple le plus simple de relation d'équivalence est l'égalité. En arithmétique la relation de congruence modulo un entier donné est une relation d'équivalence.

Pour plus d'information voir l'article « Relation d'équivalence ».

Relation d'ordre

Une **relation d'ordre** est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.

Si la relation est totale alors on dit que l'ordre est **total**. C'est le cas de la relation « plus grand que » sur les entiers naturels. Tous les éléments ne sont pas forcément comparables par une relation d'ordre ; par exemple deux entiers naturels ne sont pas forcément comparables par divisibilité. On dit alors que la divisibilité est un ordre partiel sur **N**.

Plus de détails dans l'article « Relation d'ordre ».

Relation bien fondée

Exemples

- La relation d'appartenance sur $E \times \mathcal{P}(E)$;
- la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$ (relation d'ordre) ;
- la relation inférieur ou supérieur sur $\mathbb{R}$ (relation d'ordre) ;
- la relation « est un diviseur de » sur $\mathbb{N}$ (relation d'ordre) ;
- la relation d'égalité (congruencielle ou non) sur E (relation d'équivalence).

Nombre de relations binaires sur des ensembles finis

Considérons un ensemble E fini de cardinal n et un ensemble F fini de cardinal p. Nous pouvons facilement démontrer qu'il y a autant de relations binaires de E sur F que d'applications de $E \times F$ dans $\{ 0 , 1 \}$, ce qui donne 2^{np} relations.

En particulier, si $E = F$, on trouve 2^{n^2} relations binaires sur E, dont

- $2^{n(n-1)}$ relations réflexives
- $2^{n(n+1)/2}$ relations symétriques
- Pour le nombre de relations transitives, il n'y a toujours pas actuellement de formule « fermée »

Le nombre de relations d'équivalence est égal au nombre de partitions d'un ensemble, c'est-à-dire le nombre de Bell.

Voir aussi

- relation d'équivalence
- relation d'ordre
- fonction