# Correspondance et relation

En algèbre générale (ou abstraite), le concept de **correspondance**, ou de **relation**, est une abstraction de notions telles que l'égalité, l'ordre alphabétique, ou la comparaison.

De manière informelle, une *relation* dans un ensemble ( on dit aussi « sur un ensemble » ) est une proposition qui lie un certain nombre d'éléments. Sur un ensemble constitué de personnes, par exemple, on pourrait définir une relation « Alice aime Bernard », ou « Cécile connaît David »... On peut donc voir une *relation* comme des fils reliant divers éléments d'un ensemble.

Ce concept peut être généralisé en établissant des liens entre des éléments d'ensembles distincts.

## Sommaire

1 Graphe et correspondance
2 Définition formelle
 2.1 Notes préliminaires
 2.2 Définition
 2.3 Égalité de deux correspondances
 2.4 Exemples et cas particuliers importants
3 Représentation des correspondances
4 Relations n-aires
 4.1 Notion d'arité
 4.2 Relations internes, externes et scalaires
 4.3 Classement suivant l'arité intrinsèque
 4.4 Exemples
5 Fonctions
 5.1 Images et antécédents
 5.2 Fonctions, applications et bijections
  5.2.1 Propriétés liées au nombre de correspondants
  5.2.2 Propriétés dérivées
 5.3 Correspondance réciproque
6 Classement des correspondances
7 Voir aussi

## Graphe et correspondance

Le lien entre deux éléments peut s'exprimer de manière plus formelle par un « couple ». Un *couple*, noté entre parenthèses, est constitué de deux éléments mis dans un ordre particulier. Les **correspondances**, ou **relations générales** peuvent ainsi être considérées en première approche comme des ensembles de couples, c'est-à-dire des **graphes orientés**. Mais cela ne suffit pas toujours :

> *Les propriétés des correspondances dépendent autant des absences de liens entre éléments que de leur existence.*

En d'autres termes, la donnée du *graphe* d'une correspondance ne suffit pas à définir complètement celle-ci ; il faut aussi savoir quels sont les couples d'éléments qu'elle ne lie pas. Cela revient à préciser dans quel *produit cartésien* s'inscrit la correspondance.

Néanmoins, il demeure possible, le plus souvent, de confondre une correspondance avec son graphe, du moment qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit cartésien dans lequel elle s'inscrit.

Pour illustrer ces idées, considérons par exemple l'ensemble *P* suivant de personnes :

$$P = \{\mathrm{Alice},\ \mathrm{Bernard}\}$$

Définissons-y naïvement la relation *aime* par la seule donnée de son graphe :

$$\mathrm{aime} = \{(\mathrm{Alice},\ \mathrm{Bernard}),\ (\mathrm{Alice},\ \mathrm{Alice}),\ (\mathrm{Bernard},\ \mathrm{Bernard})\}$$

Pour la relation *aime*, si « Alice *aime* Bernard », alors le couple ( Alice, Bernard ) fait partie de l'ensemble *aime*.

L'ensemble *aime* est un sous-ensemble de *P* × *P*. Nous constatons que :

- la relation *aime* est une *relation binaire* dans *P* ;
- la relation *aime* est *réflexive*, puisque toutes les personnes considérées s'aiment elles-mêmes.

Remarquons au passage que l'ordre dans le couple a de l'importance. Si « Alice *aime* Bernard », la réciproque n'est pas forcément vraie, et d'ailleurs ici ( *Bernard* , *Alice* ) n'appartient pas à *aime*.

Ajoutons une personne à *P*. L'ensemble des personnes devient :

$$Q = \{\mathrm{Alice},\ \mathrm{Bernard},\ \mathrm{Christian}\}$$

*aime* est encore un sous-ensemble de *Q* × *Q*, mais la relation *aime* n'est plus *réflexive* : la simple présence de Christian a modifié la relation, même si aucun lien n'a été rajouté.

En fait, la relation *aime* dans *Q* doit être distinguée de la relation *aime* dans *P*, même si elles ont toutes deux le même graphe. Pour y parvenir, l'idée la plus simple est de considérer qu'une relation comporte non seulement un graphe, mais aussi le produit cartésien dans lequel il s'inscrit : si *aime* désigne toujours le graphe, les relations deviennent alors :

$$(P \times P,\ \mathrm{aime}) \quad \mathrm{et} \quad (Q \times Q,\ \mathrm{aime}),$$

ou, ce qui revient en pratique au même :

$$(P,\ P,\ \mathrm{aime}) \quad \mathrm{et} \quad (Q,\ Q,\ \mathrm{aime}).$$

Cette façon de procéder comporte toutefois encore un défaut : elle ne permet pas de généraliser les relations aux *classes propres*, puisque les éléments de *n-uplets* doivent être des ensembles. Cela pose problème avec la relation d'*équipotence* par exemple, qui est à la base de la définition des *cardinaux*, et qui est censée être définie dans la classe de tous les ensembles.

Une solution (déjà entrevue dans l'article « Produit cartésien ») consiste à remplacer les triplets précédents par des *sommes disjointes* : les deux relations précédentes seront alors définies comme :

$$\dot\cup(P,\ P,\ \mathrm{aime}) \quad \mathrm{et} \quad \dot\cup(Q,\ Q,\ \mathrm{aime}),$$

mais encore notées cependant par abus d'écriture :

$$(P,\ P,\ \mathrm{aime}) \quad \mathrm{et} \quad (Q,\ Q,\ \mathrm{aime}).$$

Remarque

Le cheminement ci-dessus est caractéristique de la démarche des mathématiciens lorsqu'ils élaborent une définition : ils partent d'une première approche simple, qu'ils améliorent ensuite en la compliquant pour éliminer des contradictions internes ou prendre en compte certains cas particuliers, puis qu'ils généralisent au maximum.

# Définition formelle

## Notes préliminaires

- Pour alléger l'écriture, nous noterons à partir d'ici les *sommes disjointes* comme des *n-uplets*.
- Les définitions suivantes demeurent ainsi valides si on y remplace les *ensembles* par des *classes* même *propres*.

## Définition

> *Une* **correspondance**, *ou* **relation générale**, *est la somme disjointe de* ***trois*** *ensembles dont le dernier est une partie du produit cartésien du premier par le deuxième.*

Plus précisément:

si $E$ et $F$ sont deux ensembles, alors
$\mathfrak{C}$ est une correspondance de $E$ dans $F$ si et seulement si $\mathfrak{C}$ est égale au triplet (généralisé) $(E, F, G)$, où $G$ est une partie de $E \times F$, produit cartésien de $E$ par $F$.

En langage formel:

$$\forall E\ ,\ \forall F\,[\,\mathfrak{C}\ correspondance\ de\ E\ dans\ F\,]\ \Leftrightarrow\ [\,\exists\, G\ ,\ G \subseteq E \times F \wedge \mathfrak{C} = (E,F,G)\,]$$

$E$ est **l'ensemble de départ** de la correspondance, $F$ son **ensemble d'arrivée** et $G$ son **graphe**.

Remarque : en pratique, on confondra une correspondance avec son graphe s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les ensembles de départ et d'arrivée.

## Égalité de deux correspondances

D'après leur définition, deux correspondances sont égales si et seulement si elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et même graphe.

En d'autres termes, si $\mathfrak{C}_1 = (E_1, F_1, G_1)$ et si $\mathfrak{C}_2 = (E_2, F_2, G_2)$, alors :

$$(\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2) \Leftrightarrow [(E_1 = E_2) \wedge (F_1 = F_2) \wedge (G_1 = G_2)].$$

## Exemples et cas particuliers importants

- Etudier quels sont les sports pratiqués par les Français revient à établir une correspondance de l'ensemble des Français dans l'ensemble des sports possibles.
- Si $E = \{ a, b, c, d \}$, $F = \{ 1, 2, 3 \}$ et si $G = \{ (a, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 3) \}$, alors $(E, F, G)$ est une correspondance de $E$ dans $F$.
- Une correspondance est **vide** si et seulement si son graphe est égal à l'ensemble vide. Elle est

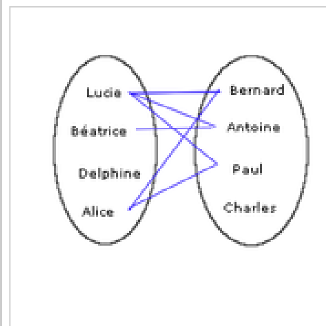
donc de la forme ( $E$, $F$, Ø ).

- Une correspondance est **pleine** si et seulement si son graphe est égal au produit cartésien des ensembles de départ et d'arrivée tout entier. Elle est donc de la forme ( $E$, $F$, $E \times F$ ).
- La relation dans $E$ dont le graphe est la diagonale de $E$ est appelée **identité** de $E$, et notée habituellement « $Id_E$ ». Elle est donc égale à ( $E$, $E$, $\Delta E$ ).
- L'ensemble de départ d'une correspondance peut être le produit cartésien de deux ensembles ou plus : ainsi, l'addition des nombres réels est une correspondance de IR × IR dans IR. Il semble évident que l'addition comporte deux arguments; mais en fait, le nombre d'arguments d'une correspondance dépend du point de vue adopté et n'en est donc pas une propriété intrinsèque: ainsi, on peut considérer que l'addition a *un seul* argument, le couple formé par les deux nombres additionnés !

## Représentation des correspondances

Il existe trois types de **représentation** d'une correspondance :

- **sagittale**, qui dérive des *diagrammes de Venn* pour les ensembles, où les ensembles de départ et d'arrivée sont représentés par deux « patatoïdes » côte à côte, les éléments par des points à l'intérieur des patatoïdes, et les couples du graphe par des flèches reliant les premières composantes aux secondes ;
- **tabulaire** ou **matricielle**, sous forme d'un tableau à deux entrées, avec en première colonne la liste des éléments de l'ensemble de départ et en première ligne celle des éléments de l'ensemble d'arrivée. Les couples sont représentés par des croix dans les cases à l'intersection de la ligne de la première composante et de la colonne de la seconde composante ;

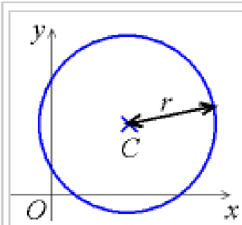


Exemple de représentation sagittale.

*Exemple de représentation matricielle.*

| . | **Bernard** | **Antoine** | **Paul** | **Charles** |
|---|---|---|---|---|
| **Lucie** | X | X | X | . |
| **Béatrice** | . | X | . | . |
| **Delphine** | . | . | . | . |
| **Alice** | X | . | X | . |

- **graphique**, avec un axe horizontal dont les points représentent les éléments de l'ensemble de départ, et un axe vertical dont les points représentent les éléments de l'ensemble d'arrivée. Les couples sont représentés par les points à l'intersection de la ligne verticale coupant l'axe horizontal à l'emplacement de la première composante, et de la ligne horizontale coupant l'axe vertical à l'emplacement de la seconde composante. Traditionnellement, le nuage des points du graphe se situe au-dessus et à droite des axes.



Exemple de représentation graphique.

Les deux dernières représentations obligent par nature à ordonner les éléments des ensembles de départ et d'arrivée. Si ces ensembles sont déjà ordonnés, on respecte leur *ordre*, sinon n'importe quel ordre peut être choisi, il n'est pas significatif pour la correspondance elle-même. Dans tous les cas, la **diagonale principale** de la représentation désigne l'ensemble des couples du produit cartésien de l'ensemble de départ par l'ensemble d'arrivée dont les deux composantes ont le même numéro d'ordre. Si les ensembles de départ et d'arrivée sont un même ensemble $E$, le même ordre est habituellement utilisé pour les éléments de départ et d'arrivée; la *diagonale principale* de la représentation se confond alors avec la *diagonale* de $E$, c'est-à-dire le graphe de l'identité de $E$.

# Relations *n*-aires

## Notion d'arité

L'ensemble de départ d'une correspondance peut être un *produit cartésien*. Le graphe d'une telle correspondance n'est plus un ensemble de couples, mais plutôt de $n$-uplets. La correspondance est alors dite **relation d'arité *n*** ou **relation *n*-aire**, c'est-à-dire :

- binaire, si $n = 2$ (correspondances de $A$ dans $B$);
- ternaire, si $n = 3$ (correspondances de $A \times B$ dans $C$);
- quaternaire, si $n = 4$ (correspondances de $A \times B \times C$ dans $D$);
- quinaire, si $n = 5$ (correspondances de $A \times B \times C \times D$ dans $E$);
- ...

Toutefois, ainsi que nous l'avons vu dans l'exemple de l'addition, cette définition de l'arité est ambiguë : le nombre d'arguments de la correspondance peut varier suivant le point de vue que l'on adopte; son arité aussi, par conséquence. L'arité définie ci-dessus n'est donc pas une propriété intrinsèque des correspondances, et ne permet pas de les classer. Ainsi, plutôt que d'écrire que telle correspondance **est** $n$-aire, ce qui suggère qu'il s'agit là d'une propriété propre à cette correspondance, peut-être vaudrait-il mieux écrire par exemple que la correspondance est **vue comme** $n$-aire.

Par ailleurs, dans la plupart des cas, il est possible de définir une arité intrinsèque à la correspondance. Pour cela, l'idée initiale est de remarquer que seul l'ensemble de départ est susceptible d'être décomposé en produit cartésien; l'ensemble d'arrivée, même s'il est effectivement un produit cartésien, est toujours considéré en bloc, et peut ainsi être pris comme référence; le nombre de fois où il apparait en facteur cartésien de l'ensemble de départ détermine alors l'arité. Si nous reprenons l'exemple de l'addition dans IR :

- l'ensemble d'arrivée (l'ensemble de référence) est l'ensemble IR des réels,
- l'ensemble de départ en est le carré cartésien, IR × IR;
- le graphe de l'addition est ainsi constitué de triplets de réels,
- et l'addition est donc une relation *intrinsèquement* **ternaire** (mais il demeure possible de la *voir comme* binaire...)

## Relations internes, externes et scalaires

En pratique, la plupart des correspondances intéressantes peuvent être rangées dans deux grandes classes:

- d'une part, celle des correspondances où n'intervient en fait qu'un seul ensemble de base $\boldsymbol{A}$, qui se confond alors avec l'ensemble d'arrivée; l'ensemble de départ est alors une *puissance cartésienne* de cet ensemble $\boldsymbol{A}$. Ces correspondances sont appelées :
  - « relations $n$-aires INTERNES à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ »,
  - ou « relations $n$-aires dans $\boldsymbol{A}$ »,
  - ou encore « relations $n$-aires sur $\boldsymbol{A}$ ».

  Ce sont en fait les correspondances de $\boldsymbol{A}^{n-1}$ dans $\boldsymbol{A}$, donc de la forme $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \ldots \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\Gamma})$.
- d'autre part, celle, dérivée de la précédente, où, à côté de l'ensemble de base $\boldsymbol{A}$ et de ses

puissances cartésiennes, intervient un ensemble $\boldsymbol{S}$ de *scalaires* dits aussi *opérateurs*; toutefois, on ne retient en fait dans cette classe que les correspondances conformes aux trois cas de figure suivants :

¤ les correspondances appelées :
- « relations $n$-aires EXTERNES A GAUCHE à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ depuis un ensemble $\boldsymbol{S}$ »,
- ou « relations $n$-aires externes à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ depuis un ensemble $\boldsymbol{S}$ à gauche »,
- ou encore « relations $n$-aires dans $\boldsymbol{A}$ à opérateurs à gauche dans $\boldsymbol{S}$ ».
- ou encore « relations $n$-aires sur $\boldsymbol{A}$ à scalaires à gauche dans $\boldsymbol{S}$ ».

Ce sont en fait les correspondances de $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}^{n-2}$ dans $\boldsymbol{A}$, donc de la forme ( $\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\ldots\times\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ ).

¤ les correspondances appelées :
- « relations $n$-aires EXTERNES A DROITE à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ depuis un ensemble $\boldsymbol{S}$ »,
- ou « relations $n$-aires externes à l'ensemble $\boldsymbol{A}$ depuis un ensemble $\boldsymbol{S}$ à droite »,
- ou encore « relations $n$-aires dans $\boldsymbol{A}$ à opérateurs à droite dans $\boldsymbol{S}$ ».
- ou encore « relations $n$-aires sur $\boldsymbol{A}$ à scalaires à droite dans $\boldsymbol{S}$ ».

Ce sont en fait les correspondances de $\boldsymbol{A}^{n-2}\times\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{A}$, donc de la forme ( $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\ldots\times\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ ).

¤ les correspondances appelées :
- « relations $n$-aires SCALAIRES dans $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{S}$ »,
- ou « relations $n$-aires scalaires de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{S}$ ».

Ce sont en fait les correspondances de $\boldsymbol{A}^{n-1}$ dans $\boldsymbol{S}$, donc de la forme ( $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\ldots\times\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ ).

Pour que ces définitions soient cohérentes, $\boldsymbol{S}$ ne doit pas être un produit cartésien où $\boldsymbol{A}$ figure ( le cas $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}$ est toutefois toléré par abus de langage : une relation interne est alors vue comme une relation externe dans $\boldsymbol{A}$ à opérateurs dans $\boldsymbol{A}$ lui-même ).

Les correspondances de $\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{A}$ où $\boldsymbol{S}$ n'est ni $\boldsymbol{A}$, ni un produit cartésien comportant $\boldsymbol{A}$ ne relèvent pas de ces définitions, mais peuvent être vues comme *relations externes* dans $\boldsymbol{A}$ au cas limite où $n = 2$. $\boldsymbol{S}$ est alors l'ensemble des opérateurs ( sans préciser à gauche ou à droite, les deux se confondant ).

A part ce cas, s'il n'est pas précisé si une relation externe est *à gauche* ou *à droite*, et si le contexte ne permet pas de lever l'ambiguïté, alors elle est *à gauche*. De même, s'il n'est pas précisé si une relation est *interne*, *externe* ou *générale*, et si le contexte ne permet pas de lever l'ambiguïté, alors elle est *interne*. Pour parler des relations au sens général du terme, il vaudra mieux préciser relation *générale*, ou employer le terme de *correspondance*.

## Classement suivant l'arité intrinsèque

D'après ce qui précède, une relation a toujours une arité intrinsèque au moins égale à 2. Nous pouvons ainsi distinguer :

- Les **relations binaires**, d'arité 2 ; en particulier :
  - une **relation binaire interne**, est une correspondance dont les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes. En d'autres termes, si $E$ est un ensemble, $\mathfrak{R}$ est une *relation binaire* dans $E$ si et seulement si c'est une correspondance de $E$ dans $E$, c'est-à-dire si :

    $$\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (E, E, G)) \wedge (G \subseteq E \times E)$$

  - une **relation binaire externe**, est une correspondance d'un ensemble $S$ dans un ensemble $E$, où $S$ n'est pas un produit cartésien dont $E$ soit une composante; en d'autres termes, si $E$ et $S$ sont deux ensembles, $\mathfrak{R}$ est une *relation binaire externe* de $S$ dans $E$ si et seulement si :

$$\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (S, E, G)) \wedge (G \subseteq S \times E)$$

- Les **relations ternaires**, d'arité 3 ; en particulier :
  - une **relation ternaire interne**, est une correspondance dont l'ensemble de départ est le carré cartésien de l'ensemble d'arrivée; en d'autres termes, si $E$ est un ensemble, $\mathfrak{R}$ est une *relation ternaire interne* dans $E$ si et seulement si :
    $$\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (E \times E, E, G)) \wedge (G \subseteq E^3)$$
  - une **relation ternaire externe à gauche** (resp. **à droite**) est une correspondance dont l'ensemble de départ est le produit cartésien d'un ensemble $S$ de *scalaires* par l'ensemble d'arrivée (resp. de l'ensemble d'arrivée par un ensemble $S$ de scalaires); en d'autres termes, si $E$ et $S$ sont deux ensembles :, $\mathfrak{R}$ est une *relation ternaire externe* dans $E$ à opérateurs dans $S$ :
    - à gauche si et seulement si : $\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (S \times E, E, G)) \wedge (G \subseteq S \times E^2)$

    - à droite si et seulement si : $\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (E \times S, E, G)) \wedge (G \subseteq E \times S \times E)$
  - une **relation ternaire scalaire** est une correspondance dont l'ensemble de départ est un carré cartésien et l'ensemble d'arrivée joue le rôle d'un ensemble de scalaires; en d'autres termes, si $E$ et $S$ sont deux ensembles, $\mathfrak{R}$ est une *relation ternaire scalaire* dans $E$ à valeurs dans $S$ si et seulement si :
    $$\exists\ G\ ,\ (\mathfrak{R} = (E \times E, S, G)) \wedge (G \subseteq E^2 \times S)$$

  Encore une fois, l'ensemble $S$ ci-dessus ne doit pas être un produit cartésien dont l'ensemble d'arrivée $E$ soit une composante.
- En pratique, on considère rarement des relations d'arité supérieure, car elles peuvent toujours se décomposer en relations binaires ou ternaires.

### Exemples

- L'égalité et l'inclusion sont des relations binaires dans la classe des ensembles.
- La réunion, l'intersection, la différence et la différence symétrique sont des relations ternaires internes dans la classe des ensembles.
- Si $A$, $B$ et $C$ sont trois ensembles disjoints deux à deux, et dont aucun n'est un produit cartésien comportant l'un des deux autres en facteur :
  - toute relation de $A$ dans $A$ est *binaire interne* ;
  - toute relation de $A$ dans $B$ est *binaire externe* ;
  - toute relation de $A$ x $A$ dans $A$ est *ternaire interne* ;
  - toute relation de $A$ x $A$ dans $B$ est *ternaire scalaire* ;
  - toute relation de $A$ x $B$ dans $A$ est *ternaire externe à droite* ;
  - toute relation de $A$ x $B$ dans $B$ est *ternaire externe à gauche* ;
  - et enfin, toute relation de $A$ x $B$ dans $C$ est *binaire externe* ( pour l'arité intrinsèque, la référence est l'ensemble d'arrivée ! ).

## Fonctions

## Images et antécédents

Si $\mathfrak{C}$ est une correspondance, avec $\mathfrak{C} = (E, F, G)$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- *y* correspond à *x* par $\mathfrak{C}$ ;
- ( *x* , *y* ) appartient à *G* ;
- *y* est **image** de *x* par $\mathfrak{C}$ ;
- *x* est **antécédent** de *y* par $\mathfrak{C}$.

Le terme de « préimage » est parfois employé à la place de celui d'« antécédent ».

« *y* correspond à *x* par $\mathfrak{C}$ » peut se noter :

- « ( *x* , *y* ) ∈ *G*( $\mathfrak{C}$ ) » (notation *ensembliste*)
- « ( *x* , *y* ) $\mathfrak{C}$ » (notation relationnelle *postfixée*)
- « $\mathfrak{C}$ ( *x* , *y* ) » (notation relationnelle *préfixée*)
- « *x* $\mathfrak{C}$ *y* » (notation relationnelle *infixée*)

Cette dernière notation est, sauf cas particulier, la plus pratique et par conséquent la plus utilisée.

L' **ensemble-image** d'une correspondance, noté habituellement « $Im\mathfrak{C}$ », est l'ensemble formé par les images de tous les éléments de l'ensemble de départ de cette correspondance. Un abus de langage courant consiste à qualifier cet ensemble d'« image » de la correspondance, mais cela peut entraîner une confusion dans le cas où la correspondance est elle-même élément d'un autre ensemble, à partir duquel une autre correspondance est bâtie.

Symétriquement, l' **ensemble-antécédent** d'une correspondance, noté habituellement « $Ant\mathfrak{C}$ », est l'ensemble formé par les antécédents de tous les éléments de l'ensemble d'arrivée de cette correspondance. L'ensemble-antécédent est parfois qualifié par abus de langage d'« antécédent » ou de « préimage » de la correspondance, mais, comme dans le paragraphe précédent, cela peut entraîner des confusions dans certains cas particuliers. L'ensemble-antécédent peut aussi être nommé « domaine de définition » de la correspondance, et il est alors noté « $Dom\mathfrak{C}$ » ou « $D\mathfrak{C}$ », mais cette dernière appellation est plutôt réservée aux *fonctions* (voir ci-après).

## Fonctions, applications et bijections

### Propriétés liées au nombre de correspondants

Une correspondance peut présenter quatre propriétés fondamentales liées au nombre d'antécédents ou d'images associés à chaque élément. Ces propriétés sont analogues entre elles, mais indépendantes les unes des autres.

Ainsi, une correspondance peut être :

- **fonctionnelle** : *tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image* :

$$\forall\,(x, y_1, y_2) \in E \times F^2, (x\,\mathfrak{C}\,y_1 \wedge x\,\mathfrak{C}\,y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$$

- **applicative** : *tout élément de l'ensemble de départ a au moins une image* :

$$\forall\,x \in E, \exists\,y \in F\ /\ x\,\mathfrak{C}\,y$$

- **injective** : *tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent* :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^2 \times F, (x_1 \,\mathfrak{C}\, y \wedge x_2 \,\mathfrak{C}\, y) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

- **surjective** : *tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent* :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \ / \ x \,\mathfrak{C}\, y.$$

*Note : sur ces appellations, voir la page de discussion associée à l'article (onglet « discussion » en haut de l'article).*

Définitions équivalentes

Une correspondance est **applicative** si et seulement si son ensemble-antécédent se confond avec son ensemble de départ, c'est-à-dire si : $Ant\mathfrak{C} = E$.

Une correspondance est **surjective** si et seulement si son ensemble-image se confond avec son ensemble d'arrivée, c'est-à-dire si : $Im\mathfrak{C} = F$.

### Propriétés dérivées

En combinant ces quatre propriétés de base, nous obtenons *a priori* 16 sortes de correspondances, mais seules 9 d'entre elles ont un qualificatif. Il est possible de résumer ces propriétés et leur définition dans le tableau suivant :

| Propriété : | au plus ... | au moins ... | exactement ... | ... |
|---|---|---|---|---|
| | *fonctionnelle* | *applicative* | **univoque** | ... une image par élément de l'ensemble de départ |
| *Correspondance* : | *injective* | *surjective* | **bijective** | ... un antécédent par élément de l'ensemble d'arrivée |
| | **bifonctionnelle** | **biapplicative** | **biunivoque** | ... une image par élément de départ et un antécédent par élément d'arrivée |

Certaines des combinaisons des quatre propriétés de base ont reçu un nom, en raison de leur importance pratique :

- Une ***fonction*** est une correspondance *fonctionnelle*. Chaque élément de départ a au plus une image. On peut donc parler de ***son*** image sans ambiguïté, et la désigner par un symbole, d'habitude « R( *x* ) » si la fonction est notée « R ». Cela permet de remplacer la notation *relationnelle* « *x* R *y* » par la notation *fonctionnelle* « *y* = R( *x* ) » plus pratique ;

- Une ***application*** est une *fonction applicative*. C’est donc aussi une correspondance *fonctionnelle* et *applicative*, c’est-à-dire une correspondance *univoque*. Comme elle est *applicative*, son domaine de définition se confond avec son ensemble de départ ;

- Une ***injection*** est une *application injective*. C’est donc une correspondance *fonctionnelle*, *applicative* et *injective*, c’est-à-dire une correspondance *applicative* et *bifonctionnelle* ;

- Une ***surjection*** est une *application surjective*. C’est donc une correspondance *fonctionnelle*, *applicative* et *surjective*, c’est-à-dire une fonction *biapplicative*. Comme elle est *surjective*, son image n'est autre que l'ensemble d'arrivée tout entier ;

- Une ***bijection*** est une *application bijective*. C’est donc une correspondance *fonctionnelle*, *applicative*, *injective* et *surjective*, c’est-à-dire une correspondance *biunivoque*.

Attention !

Une *correspondance* applicative (respectivement injective, surjective, bijective) n'est pas en général une application (respectivement une injection, une surjection, une bijection). De même, une *fonction* injective (respectivement surjective, bijective) n'est pas en général une injection (respectivement une surjection, une bijection).

## Correspondance réciproque

Les notions d'*image* et d'*antécédent* sont duales. Échanger leur rôle revient à échanger entre elles les composantes de chaque couple du graphe, donc à remplacer chaque couple ( $x$ , $y$ ) par son ***couple réciproque*** ( $y$ , $x$ ).

Le **graphe réciproque** d'un graphe $G$, noté « $G^{-1}$ », est le graphe résultant d'un tel échange :

$$G^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in G\}$$

La **correspondance réciproque** d'une correspondance est la correspondance obtenue en échangeant les ensembles de départ et d'arrivée et en remplaçant le graphe par son graphe réciproque.

En d'autres termes, si $\mathfrak{C} = (E, F, G)$ , alors : $\mathfrak{C}^{-1} = (F, E, G^{-1})$

La réciproque de la réciproque d'une correspondance n'est autre que cette correspondance :

$$\left(\mathfrak{C}^{-1}\right)^{-1} = \mathfrak{C}$$

Il suffit de lire le tableau des combinaisons des propriétés de base des correspondances (voir plus haut), en échangeant le rôle des images et des antécédents, pour obtenir les propriétés des réciproques. Ainsi :

- La réciproque d'une ***fonction*** est une correspondance *injective*. Inversement, pour que la réciproque d'une correspondance soit une fonction, il faut et il suffit que cette correspondance soit injective ;
- La réciproque d'une correspondance *applicative* est *surjective*, et *vice-versa* ;
- La réciproque d'une ***application***, c'est-à-dire d'une correspondance *univoque*, est une correspondance *bijective*. Inversement, pour que la réciproque d'une correspondance soit une application, il faut et il suffit que cette correspondance soit bijective ;
- La réciproque d'une correspondance *bifonctionnelle*, c'est-à-dire d'une fonction injective, est une correspondance *bifonctionnelle*, c'est-à-dire une fonction injective ;
- La réciproque d'une correspondance *biapplicative* est elle-même *biapplicative* ;
- Enfin, la réciproque d'une ***bijection***, c'est-à-dire d'une correspondance *biunivoque*, est une *bijection*.

La représentation d'une correspondance réciproque se déduit simplement de celle de la correspondance de départ:

- pour une représentation sagittale, en changeant le sens des flèches;
- pour une représentation matricielle, en échangeant lignes et colonnes et en prenant la matrice symétrique par rapport à la diagonale principale;
- pour une représentation graphique, en échangeant les axes et en prenant le symétrique du graphique par rapport à la diagonale principale.

## Classement des correspondances

*Tableau récapitulatif des principaux croisements entre relations et fonctions*

| Correspondances | Fonctions | Applications | Bijections |
|---|---|---|---|
| **Relations binaires internes** | Opérations unaires | Transformations | Permutations (**) |
| **Relations ternaires internes** | Opérations binaires internes | Lois (binaires) internes | (***) |
| **Relations ternaires externes (*)** | Opérations binaires externes (*) | Lois (binaires) externes (*) | . |
| **Relations ternaires scalaires** | Opérations binaires scalaires | Lois (binaires) scalaires | . |

Remarques

(*) A gauche ou à droite.

(**) Dans un ensemble fini ou dénombrable.

(***) Les *relations ternaires internes* ne peuvent être des *bijections* que si le cardinal de leur ensemble d'arrivée est infini ou égal à 0 ou à 1.

Nous retrouvons dans ce tableau les deux familles de notions définies plus haut, *relations* et *fonctions*, et leurs combinaisons :

- Une ***transformation*** dans un ensemble est une *application* de cet ensemble dans lui-même, donc une *relation binaire* dans cet ensemble ; les *transformations* sont parfois qualifiées de *lois unaires* ;
- Une ***permutation*** dans un ensemble fini ou dénombrable est une *bijection* de cet ensemble dans lui-même, donc une *relation binaire* dans cet ensemble. C'est donc un cas particulier de *transformation* ;
- Une ***opération*** est une correspondance qui est à la fois une *relation interne*, *externe* ou *scalaire*, et une *fonction* ; l'arité d'une opération est usuellement définie comme son nombre d'opérandes, mais d'une part, elle diffère alors d'une unité de l'arité des relations (l'une comptabilise l'ensemble d'arrivée, l'autre pas) et, d'autre part, là encore, le nombre d'opérandes est une question de point de vue sur l'opération, pas quelque chose qui lui est propre ;
- Une ***loi de composition*** (appellation souvent abrégée en **loi**) est une correspondance qui est à la fois une *relation interne*, *externe* ou *scalaire*, et une *application*. Les *lois* sont donc des *opérations* particulières.

Ainsi, par exemple, les « quatre opérations » de notre enfance (addition, soustraction, multiplication et division) sont effectivement des *opérations internes* dans IN, ensemble des entiers naturels, mais seules l'addition et la multiplication y sont des *lois de composition*.

## Voir aussi

- Théorie des ensembles
- Notion d'ensemble
- Sous-ensemble
- Opérations sur les ensembles
- Produit cartésien

- Opération sur des correspondances
- Correspondance de Galois
- Relation binaire
- Fonction
- Relation de Chasles
- Relation ternaire interne
- Relation ternaire externe
- Relation scalaire
- Loi de composition
- Relation d'ordre
- Bases de données relationnelles