Simulation de système

Système stochastique

Système stochastique

- Système qui évolue dans le temps et qui est sujet aux effets du hasard
- Nous allons considérer le cas d'un état continu par rapport au temps
- Une fois discrétisé, les schémas sont aussi utilisable pour un état discret
- On note S(t) le vecteur des variables caractérisant l'état

Aspects aléatoires

- On modélise généralement la chance comme une perturbation aléatoire (bruit) de l'évolution dynamique et déterministe du système
- La principale difficulté est de caractériser la perturbation aléatoire
  - Relève des probabilités et statistiques
  - Typiquement: bruit = distribution + générateur

Modèle déterministe

- Dans le cas déterministe, l'évolution est donné par la fonction qui caractérise le taux de changement de l'état:
  - $dS(t)/dt = f(S(t),t)$, $S(t0)=S0$
  - i.e. $dS(t) = f(S(t),t)dt$, $S(t0)=S0$
- Cas simple $f=0$:
  - En intégrant, on a $S(t)=S0$, pout tout $t>0$
  - L'état ne change pas. Donc, si $S(t)$ est la position d'une poussière, elle reste au même endroit

Modèle stochastique

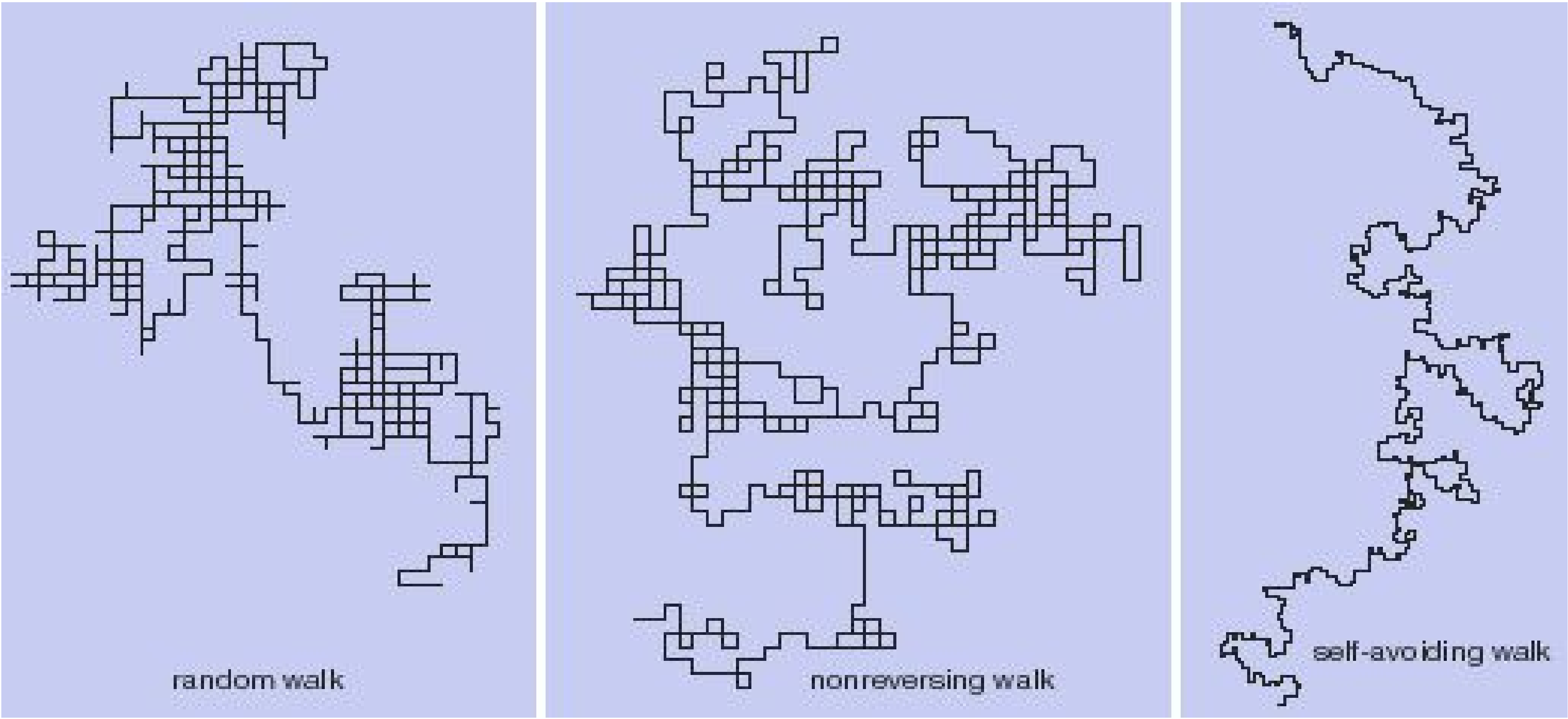
- Dans ce cas, la théorie des équations différentielles stochastiques propose un modèle tenant compte des effets aléatoires
- L'évolution est soumise à un élément perturbateur $dX(t)$:
  - $dS(t) = f(S(t),t)dt + r(S(t),t)dX(t)$, $S(0)=S0$
- Où la distribution de la variation aléatoire $dX(t)$ est symétrique avec $E[dX] = 0$ (moyenne 0)

Modèle stochastique (suite)

- Cas simple f=0:
  - Il reste les effets aléatoires!
  - $dS(t) = r(S(t),t)dX(t)$
  - Dans ce cas simple, l'état change sous l'effet du hasard. Par exemple, si S(t) est la position d'une poussière, elle oscillera autour de sa position initiale. C'est un modèle pour le phénomène de la marche aléatoire.

Marche aléatoire

- Voir ”How to avoid yourself”, B. Hayes.



Distribution de dX(t)

- Alors que dt représente un incrément déterministe du temps, dX(t) représente une variation aléatoire
- La distribution de dX(t) doit être symétrique, centrée sur 0 et de variance donnée s
- Exemple: la loi normale N(0,s)
- dX(t) est appelé un processus de Weiner

Schéma itératif

- On intégre l'équation d'évolution
  - $dS(t) = f(S(t),t)dt + r(S(t),t)dX(t)$, $S(0)=S0$
- Via un schéma itératif (pas de temps finis Δt)
  - $\Delta S = \int f(S(t),t)^{*}dt + \int r(S(t),t)^{*}dX(t)$, où l'on intègre sur un court lapse de temps Δt
- À chaque pas, $dX(t)$ est obtenu en générant un nombre aléatoire selon la distribution de $dX(t)$

Black et Scholes

- Ce modèle stochastique est très puissant
- Il est à la base du modèle de Black et Scholes publié en 1973 (prix Nobel 1997) qui sert à déterminer le prix des options en bourse
- Voir

  http://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_Black-Scholes

Actif financier

- Voici 2 exemples utilisés pour modéliser l'évolution d'un titre en bourse
- dS = m*dt + s*dX
- dS = m*S*dt + s*S*dX
  - Où m est la variation moyenne
  - Et s l'écart-type de la variation de S
- Dans le second modèle, l'évolution est mise à l'échelle avec S et ne va pas sous 0. C'est un meilleur modèle pour un actif financier.

Procédé industriel

- Le modèle s'applique aussi au cas d'un procédé industriel avec S(t) le vecteur état:
  - $\Delta S = \int f(S(t),t)*dt + \int r(S(t),t)*dX(t)$
  - Le terme f caractérise l'évolution moyenne
  - Le terme r*dX les effets aléatoires
- Notons que:
  - Les effets aléatoires sont découplés
  - Les termes f et r sont souvent connus implicitement
  - dX(t) est généralement multi-dimensionnel