Simulation de système

Nombres aléatoires

Nombres aléatoires

La méthode de Montre-Carlo dépends de la génération de nombres distribués uniformément sur l'intervalle réel [0,1]

Besoin: une séquence de nombres dans [0,1]

- Chaque nombre provient de la distribution U(0,1)
- Les nombres sont indépedants l'un de l'autre

Ce qu'on sait faire

Générer une suite déterministe et périodique de nombre entiers provenant d'un ensemble fini

De plus, on a besoin d'un nombre de départ (racine) et la suite sera toujours la même pour une racine donnée (donc déterministe!)

Ça semble contradictoire avec l'aspect aléatoire, mais ça répond au besoin

Générateur

L'algorithme pour générer N nombres U(0,1):

- Choisir une racine s(0)
- Pour i = 1 à N
    - Transition: s(i+1) = T(s(i))
    - Projection: u(i+1) = P(s(i+1))

Tout dépends alors du choix des fonctions T, P

En général, T est basé sur la fonction modulo et P est une simple mise à l'échelle (scaling)

Congruence linéaire (CL)

Le choix de base pour T et P est:

- $T(x) = (a*x + b) \bmod m$, avec a,b,m entiers
- $P(x) = x/m$

Où mod est le reste de la division entière

- Ex: $7 \bmod 3 = 1$, car $7 = 2*3 + 1$
- Rappelons que le reste est entre 0 et m excl

Presque tous les générateurs offerts par les langages de programmation sont basés sur la congruence linéaire

Exemple de CL

- Posons a=6, m=13, b=0, s(0)=1, la suite est:
  - 1, 6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1, …
- En appliquant, le scaling, on trouve:
  - 0.0769, 0.4615, 0.7692, 0.6153, 0.6923, 0.1538, 0.9230, 0.5384, 0.2307, 0.3846, 0.3076, 0.8461, 0.0769, …
- On observe que
  - Le cycle est de longueur m-1
  - On ne génère jamais les nombres 0 et m

Qualité du générateur CL

Dépend essentiellement de a et m

- Ex: essayer avec a=6 et m=12

L'évaluation de la qualité des choix de a et m est un problème très difficile. Des chercheurs ont fait des tables de “bons” choix

- Voir les articles de M. Pierre L'Écuyer

Notons qu'on a intérêt à prendre m grand, mais attention à la mise en oeuvre!

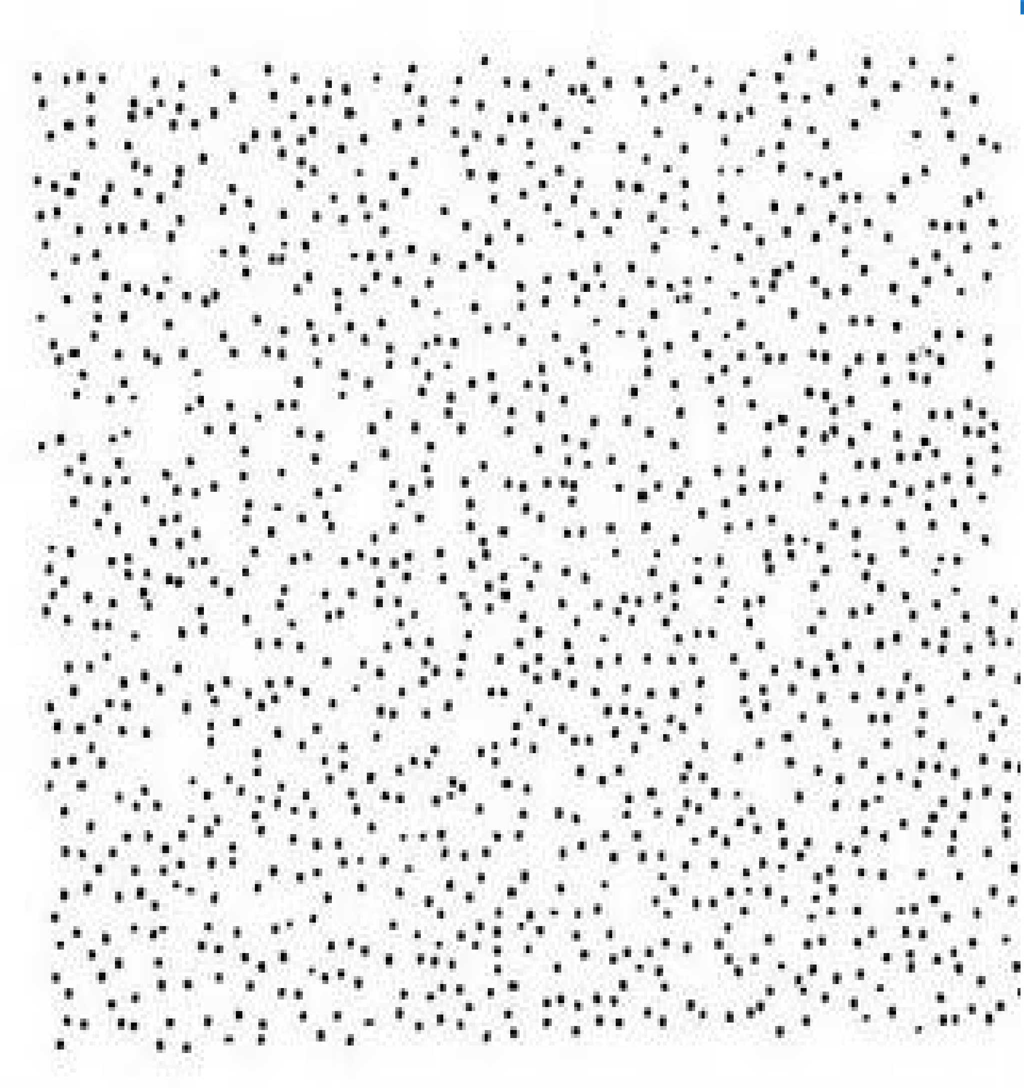
Cas général

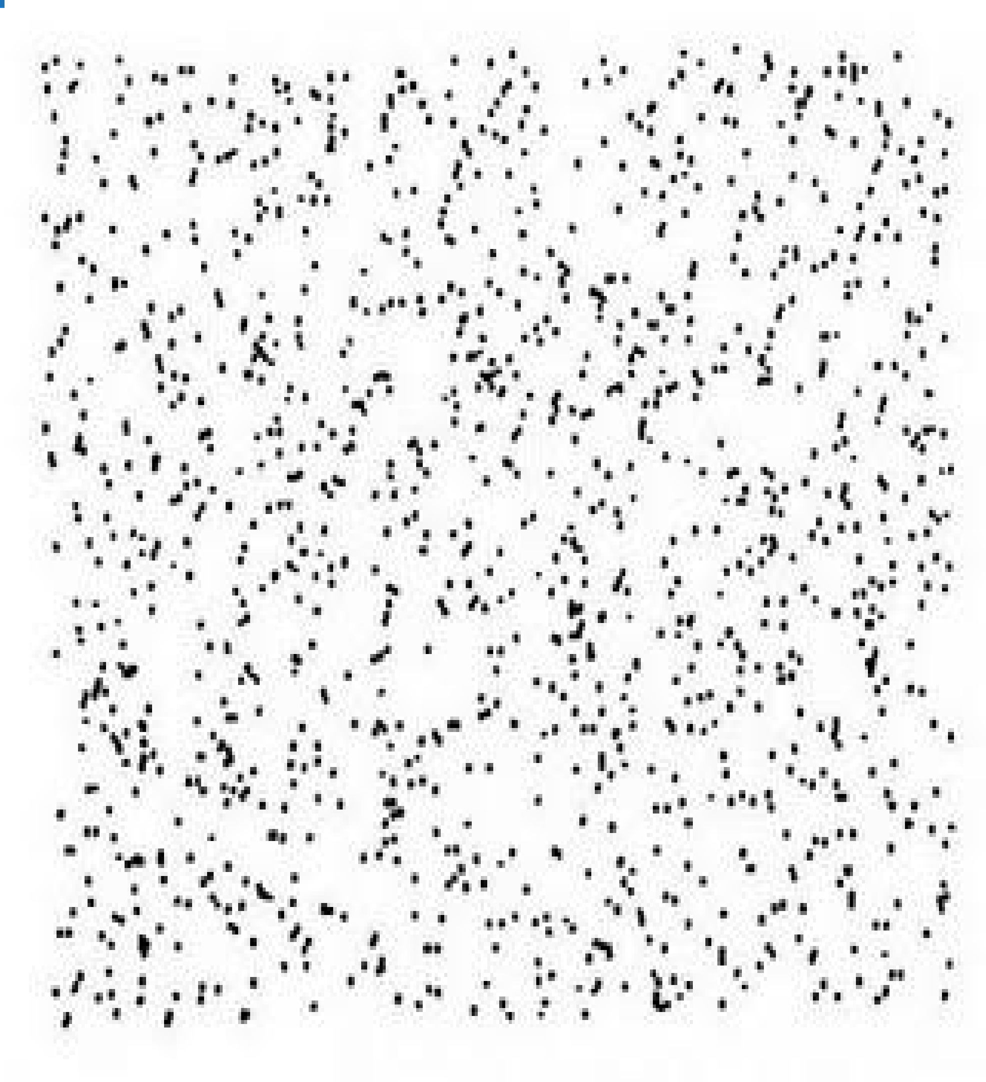
Il existe plusieurs variantes du générateur CL et il y a des alternatives

Il existe des tests pour comparer les générateurs, mais ils ne sont pas parfait…

En outre, il faut se méfier des intuitions, la capacité du cerveux humains à capter les patterns et percevoir l'effet du hasard sont très limités

Laquelle est aléatoire?





Test de précision

Les tests de précisions mesurent la qualité d'un résultat obtenu via la méthode de Monte-Carlo

Exemple:

> Calculer l'aire d'un cercle de rayon $r<1$ via la proportion de points (x(i),x(i+k)) du carré unitaire qui sont dans le cercle. On compare le résultat avec la valeur obtenue via la formule usuelle pour l’aire d’un cercle

Test d'uniformité

On compare la distribution des points (x(i),x(i+k)) pour diverses valeurs de k. En outre, il ne devrait pas y avoir de pattern

La mise en oeuvre est délicate. Par exemple, on peut avoir une estimation en comparant la distribution des points dans des zones de même taille du carré unitaire. Les distributions devraient converger lorsque le nombre de points tend vers l’infini