Simulation de système

Méthode de Monte-Carlo

Méthode de Monte-Carlo

Un des 10 algorithmes les plus importants

Désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires

Le nom fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo

Concepts clefs

RNG (random number generator): Génère des valeurs selon la distribution uniforme U(0,1)

Échantillonnage: Génére un échantillon de valeurs aléatoires selon une distribution donnée

Intégration: Estimer la valeur d'une intégrale via la notion d'espérance mathématique et la loi des grands nombres

Rappel de probabilité

Une probabilité est un nombre dans [0,1]

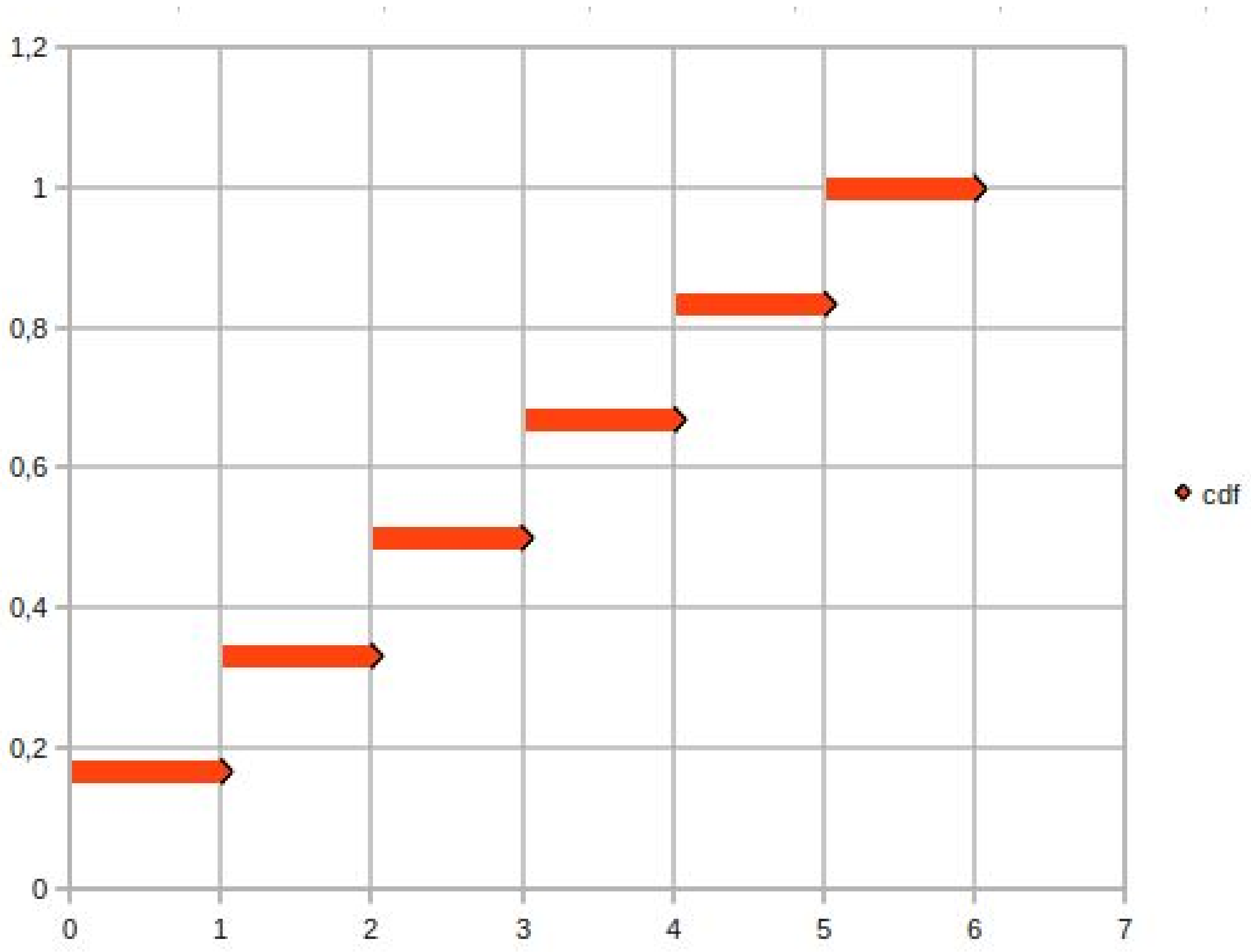
- 1 est la probabilité de l'événement certain
- 0 est la probabilité d'un événement impossible

La probabilité d'un événement e est donné par un modèle p(e)

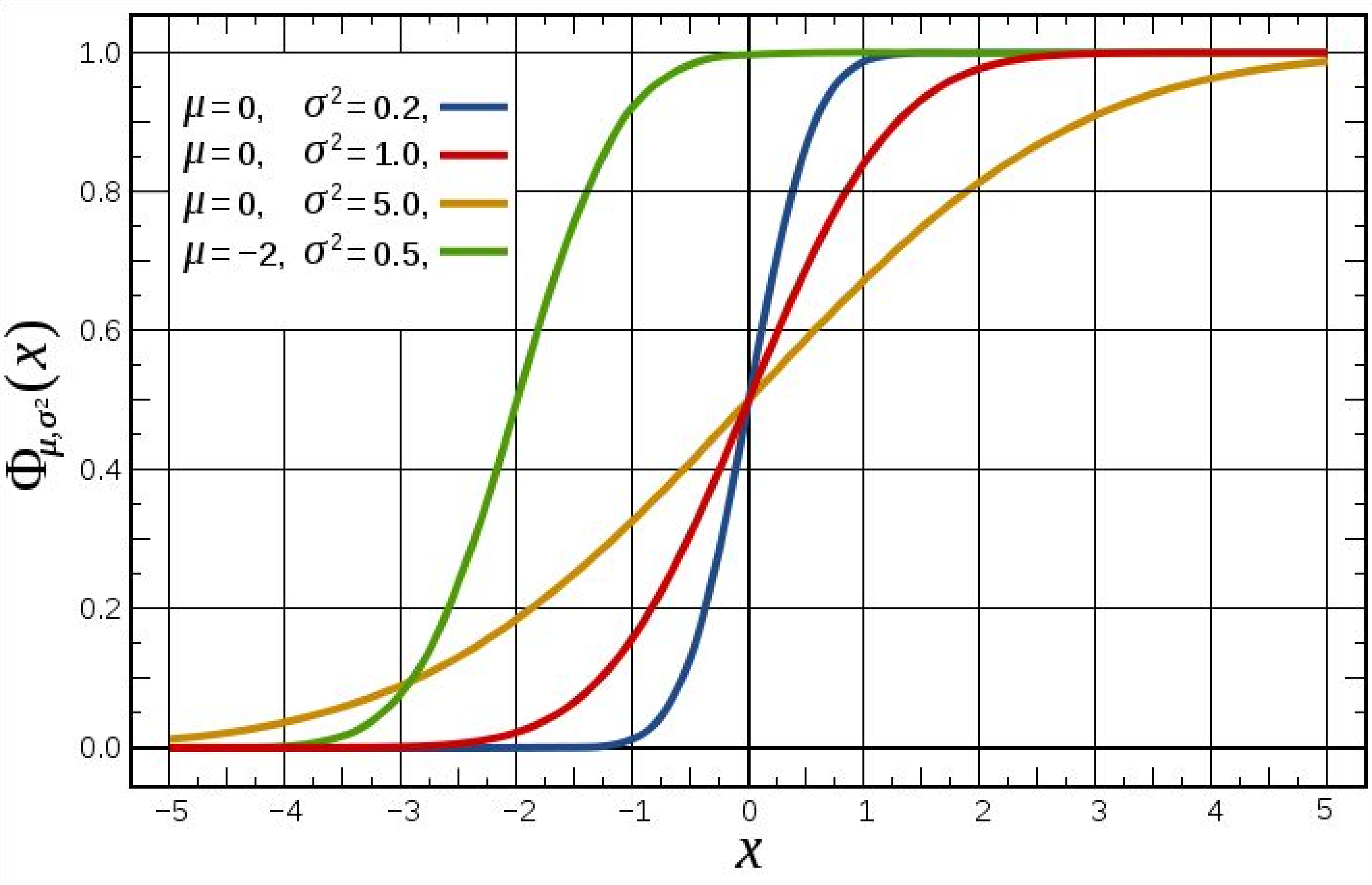
On représente généralement p(e) via la fonction cumulative de probabilité:

$$x \rightarrow CDF(x) : x \rightarrow p(e \leq x) \in [0,1]$$

CDF de la loi du dé à 6 faces



CDF de la loi normale



Échantillonnage

Supposons que

- on sait générer des valeurs selon la loi uniforme U(0,1)
- on a une distribution de probabilité cumulative (CDF) F

On génère un événement selon la CDF en:

- Générant un nombre u selon U(0,1)
- Trouvant x tel que u=F(x)

On obtient un échantillon en répétant

Note: trouver x tel que u=F(x) est une inversion!

Intégration

L'intégration via Monte-Carlo s'obtient du concept d'espérance mathématique d'une fonction g() d'une variable aléatoire dont la distribution de probabilité sur [a,b] est f():

$$G = E(g(X)) = \int_a^b g(x) f_X(x) \mathrm{d}x \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(x_i)$$

Intégration (suite 1)

La moyenne d'échantillon m est un estimateur de l'espérance mathématique E

La loi des grands nombres nous assure que:

$$m \to E \text{ lorsque } N \to \infty$$

L'intégrale balai toutes les valeurs de x et on pondère les valeurs de la fonction par la probabilité

Intégration (suite 2)

Exemple en discrèt: on intègre $f(x)=x^2$ sur les valeurs d'un dé avec la loi uniforme usuelle: $p(x)=⅙$

Donc: $\sum_{x=1,6} f(x)*p(x) = ⅙*(1+4+9+16+25+36)$

$$=15.16666666...$$

Qui peut être approximé via Monte-Carlo avec un grand nombre de valeur x_i généré d'un dé: $(\sum x_i^2)/N$

Intégration (suite 3)

Exemple en discrèt: Monte-Carlo avec un grand nombre de valeur x_i généré d'un dé: $(\sum x_i^2)/N$

```
import random
s=0; n=1000000
for i in range(n):
    v=random.randint(1,6)
    s+=v*v
print(str(s/n))
```

Une exécution donne l'approximation: 15.1608

Exemple: intégrer une f

On peut utiliser Monte-Carlo pour approximer l'intégrale de fonctions déterministes

Il suffit de générer une expérience aléatoire dont l'espérance est l'aire sous la courbe

La loi de probabilité $f_X(x)$ est 1, si on est sous la courbe, 0 autrement

Intégrale d'une fonction